Université de Tours Juin 2018

Master de mathématiques 1ère année

Analyse Fonctionnelle – Rattrapage.

Durée 3h. Documents autorisés. Barême indicatif sur 24 points.

Exercice I. (7.5 pts, étude d'un opérateur intégral, norme induite, utilisation de la compacité)

Soit l'espace $E := \{f \in C([0,M]),\ \ f(0) = 0\}$, muni de la norme usuelle de $C([0,M])$. On considère l'application

$$B : f \mapsto Bf, \quad (Bf)(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds\ , & t \in]0,M] \\ 0\,, & t = 0. \end{cases}$$

1. a) Montrer que B est une application linéaire continue de E dans lui-même. Montrer que la norme de B dans $\mathcal{L}(E,E)$ n'excède pas 1.

   b) Montrer que cette norme est égale à 1, en construisant une suite $(f_n)_n \subset E$ telle que $\|f_n\| = 1$ pour tout n et $\|Bf_n\|_E \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

   c) Montrer que la norme $\|B\|_{\mathcal{L}(E,E)}$ n'est pas atteinte, au sens qu'il n'existe pas $f \in E$ tel que $\|Bf\| = \|B\|_{\mathcal{L}(E,E)}\|f\|$.

2. a) Soit X_k^o le sous-e.v.n. de E constitué des fonctions polynomiales de degré $\leq k$, s'annulant en $t = 0$. On munit X_k^o de la norme de $C([0,M])$. Montrer que B (restreint sur X_k^o) est une application linéaire continue de X_k^o dans lui-même.

   b) Sans faire de calcul, montrer que $\|B\|_{\mathcal{L}(X_k^o,X_k^o)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(E,E)}$.

3. a) Peut-on affirmer que la sphère unité de $(X_k^o, \|\cdot\|_E)$ est compacte ?

   b) Justifier, en utilisant la question précédente, que $\|B\|_{\mathcal{L}(X_k^o,X_k^o)}$ est atteinte, au sens qu'il existe $f \in X_k^o$, $\|f\| = 1$ tel que $\|Bf\| = \|B\|_{\mathcal{L}(X_k^o,X_k^o)}\|f\|$.

   c) En déduire que $\|B\|_{\mathcal{L}(X_k^o,X_k^o)} < \|B\|_{\mathcal{L}(E,E)}$.

Exercice II. (3 pts, convergence dans les espaces L^p)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, pour $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue.

Pour $a > 0$, on définit $f_a(x) = \frac{f(x)}{1+a^2|f(x)|}$.

1.(a) Montrer que f_a converge, lorsque $a \to 0^+$, vers f en $\|\cdot\|_1$.

(b) Comparer $\|f_a\|_\infty$ avec $\|f\|_\infty$ et en déduire que $\forall p \in]1,\infty[\ f_a \to f$ en $\|\cdot\|_p$.

2. Étudier la convergence de f_a en $\|\cdot\|_p$, $p = 1$ puis $p \in]1,\infty[$, lorsque $a \to +\infty$.

Exercice III. (4 pts, histoires de densité)

On munit $]-1,1[$ de la mesure de Lebesgue.

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Stone-Weierstrass (cas réel) et en déduire, en vérifiant soigneusement les hypothèses, le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass.

2. En déduire la densité des fonctions polynomiales dans $L^p(]-1,1[)$ pour $1 \leq p < +\infty$. Détailler l'argument, en faisant attention aux normes mises en jeu.

3. Les fonctions polynomiales sont-elles denses dans $L^\infty(]-1,1[)$?

4. Soit $f \in L^2(]-1,1[)$ une fonction telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ \int_{]-1,1[} f(t)t^n\,d\lambda(t) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice IV. (4.5 pts, un petit tour des caractérisations de la compacité)

On note (eL), (BL) et (BW) les propriétés de ϵ de Lebesgue, de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass, respectivement.

1. Soit E un espace vectoriel normé quelconque.
Montrer que le singleton $\{0_E\}$ est compact en utilisant la propriété de votre choix.

2. *On ne servira pas ici de la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}$ comme les fermés–bornés.*

(a) Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas compact en utilisant (BW).
Donner une seconde preuve, indépendante, en utilisant (BL).

(b) Montrer que $]0,1[$ n'est pas compact en utilisant la propriété (BL).
Indication : on peut considérer les intervalles $]\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}[$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On se place maintenant dans $C([0,1])$.
Soit A_{2018} l'ensemble de toutes les fonctions $f(\cdot)$ sur $[0,1]$ qui sont polynômiales de la forme

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad f : t \mapsto a_1 t + \ldots a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n, \ \ (a_k)_k \subset \mathbb{R}, \qquad \sum\nolimits_{k=1}^{n} k|a_k| \leq 2018.$$

Montrer que A_{2018} est relativement compacte.
Indication : on pourra écrire $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\,ds$ *pour borner* $\|f\|_\infty$.

Exercice V. (5 pts, opérateurs dans un espace de Hilbert et un peu de Fourier)

1. Soit H un espace de Hilbert complexe et $A \in \mathcal{L}(H,H)$. On rappelle que λ est une valeur propre de A s'il existe $e \in H$ tel que $Ae = \lambda e$. Dans ce cas, on dit que e est un vecteur propre associé à λ. On suppose que A est autoadjoint [1], càd $A^* = A$.

(a) Montrer que les valeurs propres de A sont réelles.

(b) Montrer que si e, f sont vecteurs propres de A qui correspondent à deux valeurs propres différentes, alors $e \perp f$.

2. Soit $H = L^2_{per}$. On note par $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de $f \in H$; on rappelle que $f \in H$ ssi $(c_n(f)) \in \tilde{\ell}^2$, où $\tilde{\ell}^2$ désigne l'espace des suites compexes numérotées par $n \in \mathbb{Z}$. On définit l'opérateur

$$S : f \mapsto \left[t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1+(-1)^n}{2} c_n(f) e^{int} \right].$$

(a) Calculer S pour $f = 1$ puis pour $f = \exp$.

(b) Montrer que $S \circ S = S$.

(c) Montrer que S est auto-adjoint.

(d) Montrer que S peut être décrit comme la projection hilbertienne sur son image.

1. On rappelle que pour $A \in \mathcal{L}(H,H)$, A^* est défini par la propriété

$$\forall\, x, y \in H \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$