Université de Tours Janvier 2018
Master de mathématiques 1ère année

Analyse Fonctionnelle – Examen final.
Durée 4h. Documents autorisés. Barème indicatif sur 30 points.

Exercice I. (4.5 pts : la base hilbertienne de Fourier, opérateurs linéaires)
Soit $H = L^2_{per}$. On note par $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de $f \in H$; on rappelle que $f \in H$ ssi $(c_n(f)) \in \tilde{\ell}^2$, où $\tilde{\ell}^2$ désigne l'espace des suites compexes numérotés par $n \in \mathbb{Z}$. On définit l'opérateur

$$S : f \mapsto \Big[t \mapsto \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n c_n(f) e^{int} \Big] .$$

1. Calculer S pour $f = 1$ puis pour $f = \cos$.
2. Montrer que $S \circ S = \mathrm{Id}$.
3. Montrer que S est une isométrie linéaire surjective de H.
4. Montrer que S est auto-adjoint.

Exercice II. (5.5 pts : convergence dans les espaces L^p)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, pour $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue.
Pour $a > 0$, on définit $f_a(x) = e^{-ax^2} f(x)$.

1.(a) Montrer que f_a converge, lorsque $a \to 0^+$, vers f en $\|\cdot\|_1$.
(b) Rappeler brièvement pourquoi $\forall p \in]1, +\infty[$ on a $f \in L^p$.
(c) Borner $\|f_a - f\|_\infty$ en fonction de $\|f\|_\infty$.
En déduire que $\forall p \in]1, \infty[\quad f_a \to f$ en $\|\cdot\|_p$ lorsque $a \to 0^+$.

2. Étudier la convergence de f_a en $\|\cdot\|_p$, $p = 1$ puis $p \in]1, \infty[$, lorsque $a \to +\infty$.

3.(a) Soit $f = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\left[n\,,\, n+\frac{1}{n^2} \right]}$. On peut s'aider d'un croquis du graphe de f.
Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ mais f_a ne converge pas vers f en $\|\cdot\|_\infty$ lorsque $a \to 0^+$.
(b) Donner un exemple de $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ tel que $f_a \not\to 0$ en $\|\cdot\|_\infty$ lorsque $a \to +\infty$.

Exercice III. (6.5 pts : différentes caractérisations de la compacité)
On note (eL), (BL) et (BW) les propriétés de ϵ de Lebesgue, de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass, respectivement. On ne se servira pas, dans ces questions, de la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}$ comme les fermés–bornés.

1. Montrer que $[0, 1]$ est compact en utilisant la propriété (eL).
Qu'est-ce qui empêche d'affirmer, de la même façon, que $]0, 1[$ est compact ?
2. Montrer que $[0, +\infty[$ n'est pas compact en utilisant (BW).
Donner une seconde preuve, indépendante, en utilisant (BL).
3. Montrer que $\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ est compact en utilisant (BL).

4.a) Soit B une partie bornée de $L^\infty([0, 1], \lambda)$ et

$$A = \Big\{ f \in C([0, 1]) \,\Big|\, \forall x \in [0, 1]\;\; f(x) = \int_{[0,x]} g(s)\, d\lambda(s), \;\; g \in B \Big\}.$$

Montrer que A est relativement compacte dans $C([0, 1])$.
b) Démontrer la même propriété lorsque dans la définition de la famille A,
la famille B est une partie bornée de $L^2([0, 1], \lambda)$.
c) Montrer que la relative compacité de A peut être fausse si dans la définition de la famille A,
la famille B est une partie bornée de $L^1([0, 1], \lambda)$.
Indication : on peut considérer $g_n = 2^{n+1} \mathbb{1}_{[2^{-(n+1)}, 2^{-n}]}$
et montrer que la suite $(f_n)_n$ est écartée dans $C([0, 1])$.

Exercice IV. (7 pts : Stone-Weierstrass ; bases hilbertiennes)
Étant données deux fonctions u, v sur $[0, 2\pi]$, on note $u \otimes v$ la fonction définie sur $[0, 2\pi]^2$ par

$$\forall (x, y) \in [0, 2\pi]^2, \quad (u \otimes v)(x, y) \;=\; u(x)v(y).$$

Par exemple, $(x, y) \mapsto x^2 \sin(y)$ est de la forme $u \otimes v$ avec $u(\cdot) = \cdot^2$ est $v(\cdot) = \sin(\cdot)$.
1. On s'intéresse ici à l'espace $\mathbb{E} = C([0, 2\pi]^2; \mathbb{C})$ muni de sa norme canonique $\| \cdot \|_\infty$. On définit

$$\mathcal{A} \;=\; \mathrm{vect}\big\{ u \otimes v,\; u, v \in C([0, 2\pi]; \mathbb{C}) \big\}.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre dense de $(\mathbb{E}, \| \cdot \|_\infty)$. Justifier soigneusement.
2. On s'intéresse à présent à l'espace $\mathbb{F} = L^2([0, 2\pi]^2, \frac{1}{(2\pi)^2} dxdy; \mathbb{C})$ où $dxdy$ est la mesure de Lebesgue bidimensionnelle (dx, dy étant les mesures de Lebesgue en dimension un). On rappelle que $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$ et on admet que $\mathbb{E}$ est dense dans $\mathbb{F}$ pour la norme de $\mathbb{F}$ notée $\| \cdot \|_{2,per}$.
On se donne une base hilbertienne $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace $F = L^2([0, 2\pi], \frac{1}{2\pi} dx; \mathbb{C})$, dans le but d'en construire une pour l'espace $\mathbb{F}$.
a) Montrer que la famille $(f^{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ où $f^{m,n} \;=\; e^m \otimes e^n$ est une famille orthonormée de $\mathbb{F}$.
b) Montrer que si $u_n \to u$ et $v_n \to v$ dans F, alors $u_n \otimes v_n \;\to\; u \otimes v$ dans $\mathbb{F}$.
c) En déduire que la famille $(f^{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathbb{F}$.
3. On remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$ dans la question précédente (ce n'est qu'une question de numérotation). Pour $f \in \mathbb{F}$, on pose

$$c_{n,m}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{[0,2\pi]^2} f(x, y) e^{-inx - imy}\, dxdy.$$

(a) Trouver $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |c_{m,n}(f)|^2$ en fonction de f.
(b) Quelle valeur peut-on donner à $\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} c_{n,m}(f) e^{inx} e^{imy}$?
La réponse est-elle valable pour tout $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$?

Exercice V. (6.5 pts : modes de convergence dans ℓ^2).
On travaille dans l'espace ℓ^2 réel. On notera e^m le $m^{\text{ième}}$ vecteur de la "base canonique" de ℓ^2. On écrira CV pour la convergence en norme $\| \cdot \|_2$ (la convergence forte), CVF pour la convergence faible et CVS pour la convergence simple (composante par composante).
1.a) Montrer que $CV \Rightarrow CVS$.
b) Montrer qu'en général, $CVS \not\Rightarrow CV$.
2.a) Quel théorème du cours permet d'affirmer que $(\mathcal{X}^m)_m$ CVF vers $\mathcal{X}$ si et seulement si

$$\forall \mathcal{Y} \in \ell^2 \;\; \langle \mathcal{X}^m, \mathcal{Y} \rangle \to \langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle \;\; ?$$

b) Montrer que $CV \Rightarrow CVF$.
c) Montrer que la suite $(e^m)_m$ est écartée et qu'elle converge faiblement.
d) En déduire qu'en général, $CVF \not\Rightarrow CV$.
3.a) Montrer que[†] $CVF \Rightarrow CVS$.
b) Montrer que[‡] $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}^m \text{ CVS vers } \mathcal{X} \\ (\mathcal{X}^m)_m \text{ bornée dans } \ell^2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}^m \text{ CVF vers } \mathcal{X}.$
4. Montrer que[§] $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}^m \text{ CVF vers } \mathcal{X} \\ \|\mathcal{X}^m\|_2 \to \|\mathcal{X}\|_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}^m \text{ CV vers } \mathcal{X}.$

†. Attention, cette propriété est fausse dans la plupart des espaces autres que les espaces de suites
‡. Attention, cette propriété aussi est fausse dans la plupart des espaces autres que les espaces de suites
§. Cette propriété est vraie dans tous les Hilberts