Université François-Rabelais / Université d'Orléans — Novembre 2017-2018
Master de mathématiques 1ère année

Analyse Fonctionnelle – Devoir surveillé.
Durée 2h. Documents interdits. Barème indicatif sur 20 points.
Il est autorisé d'admettre explicitement certaines questions pour les utiliser dans la suite.

Exercice 1. (4.5 points. Espaces ℓ^p.)
Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Y}^k := (y_n^k)_{n\geqslant 1}$ avec $y_n^k = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad k+1 \leqslant n \leqslant 2k \\ 0 & , \quad \text{sinon.} \end{cases}$

(i) Montrer que $(\mathcal{Y}^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers zéro dans ℓ_2 lorsque $k \to \infty$.
(ii) Montrer que $(\mathcal{Y}^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans ℓ_1. Montrer qu'elle ne converge pas dans ℓ_1.
(iii) Montrer que si $\mathcal{Y} \in \ell_1$, alors $\mathcal{Y} \in \ell_p$ pour tout $p > 1$.
(iv) Montrer que pour $1 \leqslant p \leqslant 2$ et $\mathcal{Y} \in \ell_1$, on a $\|\mathcal{Y}\|_p \leqslant \|\mathcal{Y}\|_1^{\frac{2}{p}-1} \|\mathcal{Y}\|_2^{2-\frac{2}{p}}$.
Indication : on peut remarquer que : $\forall y \in \mathbb{R},\ |y|^p = |y|^{2-p}|y^2|^{p-1}$
(v) En déduire que $(\mathcal{Y}^k)_k$ tend vers zero dans ℓ_p, $1 < p \leqslant 2$.

Exercice 2. (11 points. Espace $C([a,b])$: opérateurs linéaires, point fixe et équadiff ; compacité.)
Notons par $\|\cdot\|_\infty$ la norme canonique de $E = C([0;1])$ et posons $\|f\|_0 = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)e^{-x}|$.
Considérons l'opérateur $T : E \to E$ défini par

$$\forall x \in [0,1] \ \ (Tf)(x) = \int_0^x 2t\, f(t)\, dt.$$

1. (a) Montrer que $\|\cdot\|_0$ définit une norme sur E qui est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
   (b) En déduire que $(E, \|\cdot\|_0)$ est complet.
   (c) Vérifier que T est bien défini et linéaire.
   Étudier ensuite la continuité de T, plus précisement :
      i. Calculer la norme $|\!|\!|T|\!|\!|_\infty$ de T, càd la norme induite lorsqu'on munit E (l'espace de départ et celui d'arrivée) de la norme canonique $\|\cdot\|_\infty$.
      ii. Soit $|\!|\!|T|\!|\!|_0$ la norme induite de T lorsqu'on munit E de la norme modifiée $\|\cdot\|_0$.
      Montrer que $|\!|\!|T|\!|\!|_0 \le \sup_{x\in[0,1]} |2e^{-t}(te^t - e^t + 1)| = 2/e$.
      Indication : on peut écrire $f(t) = f(t)e^{-t} \cdot e^t$.
   (d) Déduire des questions précédentes que dans E, l'équation intégrale

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x 2ty(t)\, dt, \quad x \in [0;1] \qquad (1)$$

   admet une et une seule solution en l'inconnue y.
   Indication : considérer $\tilde{T} : E \to E$, $(\tilde{T}f)(x) = \frac{x^2}{2} + (Tf)(x)$.

(e) Quel problème de Cauchy de la forme

$$\begin{aligned} y' &= F(t,y) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

peut être résolu en étudiant l'équation intégrale (1) ?
On demande une déduction, mais pas de justification détaillée.

2. (Cette question est indépendante de 1.)
(a) **(Q. de cours)** Énoncer un critère de compacité relative[1] d'une partie A de $C([0,1])$.
(b) Montrer que l'opérateur T défini ci-dessus a la propriété suivante :
Si (f_n) est une suite de $C([0,1])$ telle que $\|f_n\|_\infty \leq 1$ alors la suite $(T(f_n))$ admet une suite extraite convergente.

Exercice 3. (4.5 points. Espaces L^p, modes de convergence).
Soit $(X,\mu,\mathbb{K})$ un espace mesuré. Soit $p,p' \in [1;+\infty]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, abrégeons $L^p = L^p(X,\mu,\mathbb{K})$.

1. Soit (f_n) une suite de L^p convergeant vers $f \in L^p$ dans L^p, soit (g_n) une suite de $L^{p'}$ convergeant vers $g \in L^{p'}$ dans $L^{p'}$. Montrer que $\int_X f_n g_n \, d\mu \to \int_X fg \, d\mu$ lorsque $n \to +\infty$.
Indication : on doit se servir de l'inégalité triangulaire et d'autres inégalités.
2. On suppose ici $p \neq +\infty$. Montrer que si $f_n \rightharpoonup f$ (convergence faible dans L^p) et $g_n \to g$ (convergence forte dans $L^{p'}$) alors on a encore $\int_X f_n g_n \, d\mu \to \int_X fg \, d\mu$ lorsque $n \to +\infty$.
Indication : on admet le fait suivant : une suite convergeant faiblement est bornée.
3. On suppose ici $p \notin \{1,+\infty\}$. Pour $(X,\mu,\mathbb{K})$ on prend $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue λ. Soit $f_n = n^{-1/p}\mathbf{1}_{[0;n]}$ et $g_n = n^{-1/p'}\mathbf{1}_{[0;n]}$.
Montrer que $f_n \rightharpoonup 0$ (convergence faible dans L^p), $g_n \rightharpoonup 0$ (convergence faible dans $L^{p'}$) mais $\int_X f_n g_n \, d\lambda \not\to 0$.

1. On rappelle qu'une partie A de E est dite relativement compacte si son adhérence est compacte ou, de façon équivalente, si toute suite de A admet une suite extraite convergente (avec limite dans E)