Rattrapage Analyse 4 , durée : 2h. Barème indicatif sur 24 pts.

Les calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

Exercice 1. *9 pts (Séries de Fourier, Dirichlet, Parseval, cv. normale, opérations TàT)*

On désigne par $f(.)$ la fonction paire 2π-périodique donnée sur $[0,\pi[$ par $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$.

1. (a) Esquisser le graphe de $f(.)$. Indiquer la régularité qu'a cette fonction (continue ? continûment dérivable ? C^1 par morceaux) ?
   (b) En déduire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $SF_f(x) = f(x)$.
2. (a) Montrer que la série de Fourier de $f(.)$ s'écrit
$$SF_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$
   (b) Trouver la somme de la série $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
3. (a) Montrer que la série $SF_f(.)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que pour $x \in [0,\pi]$
$$\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{\cos((2p+1)t)}{(2p+1)^2}\,dt = \frac{x(\pi - x)}{2}.$$
   (c) Soit g la fonction impaire 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par $g(x) = \frac{x(\pi - x)}{2}$. Expliquer (on ne demande pas de preuve complète) pourquoi l'on devrait avoir
$$SF_g(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)x)}{(2p+1)^3}.$$
   (d) Vérifier que $\sin((2p+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^p$ puis trouver la somme de la série $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.
4. Sans effectuer les calculs, indiquer deux méthodes différentes pour trouver la somme de la série $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}$.

Tournez, SVP

Exercice 2. *5 pts (Séries entières classiques, rayon, opérations TàT)*

1. (a) Trouver le rayon de convergence R et rappeler l'expression de la somme $S(x)$ (pour $x \in]-R,R[$) de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

   (b) En déduire le rayon R' de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ puis montrer que la somme $T(x)$ est une fonction continue sur $[-R',R']$.

   (c) Trouver l'expression de la somme $T(x)$ de la série de (b).

   Indication : on peut commencer par calculer la dérivée de la fonction

   $$F : x \mapsto (1+x)\Big(\ln(1+x)-1\Big).$$

2. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{5n}}{n}$ puis indiquer le comportement de la série aux limites du domaine de convergence.

Exercice 3. *4 pts (Cv. simple et uniforme d'une suite / d'une série de fonctions)*

Soit la suite de fonctions $(f_n(.))_n$ sur $I=[0,1]$ définie par

$$f_n(x) = x^n + (1-x)^n.$$

1. Trouver la limite simple de cette suite.
2. Montrer que la convergence de $(f_n(.))_n$ n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
3. Soit $0 < a < \frac{1}{2}$. Montrer que la convergence est uniforme sur l'intervalle $[a, 1-a]$.
4. En déduire que la série

   $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n(x)$$

   converge uniformément sur $[a, 1-a]$.

Exercice 4. *6 pts (Résolution des équations différentielles à l'aide des séries)*

1. (a) Rappeler l'expression de la somme de la série

   $$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{(-x)^n}{2\cdot 3\cdot 4\cdot \cdots \cdot (n-1)\cdot n} + \ldots \qquad .$$

   Sur quel domaine la série converge ?

   (b) Trouver une solution de l'équation différentielle $y''(x) - y(x) = 0$ vérifiant $y(0)=1$, $y'(0)=-1$. Indiquer le domaine de validité de la solution obtenue.

   Indication : on peut chercher sous la forme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots$

2. (a) Trouver une solution de l'équation différentielle

   $$y''(x) - y(x) = \frac{\pi}{2} - x$$

   valable sur l'intervalle $]0,\pi[$.

   Indication : on peut chercher sous la forme de série de Fourier d'une fonction paire.

   (b) Justifier que la formule obtenue donne bien une fonction deux fois dérivable.