CC1 Analyse 4 , durée : 2h. Barème sur 24 pts.

Les calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

Exercice 1. Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x) = (1-x^2)^n.$$

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[-1,1]/[-\varepsilon,\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon \in]0,1[$.
3. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[-1,1]$.
4. A-t-on la convergence uniforme de (f_n) sur $]0,1[$?

Exercice 2. Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ où

$$f_n \;:\; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto xe^{-n^2x} .$$

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
   On note S sa fonction somme.
2. Pour $n \geq 1$, étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Etudier la nature des séries numériques :

$$(a) \sum_{n\geq 0} \frac{e^{in^3}+n}{1+in^3}, \quad (b) \sum_{n\geq 0} e^{n(-\frac{1}{2}+2i)} \quad \text{et} \quad (c) \sum_{n\geq 2} \frac{e^{2in}}{\ln n} .$$

Tournez, SVP

Exercice 4. Soit (f_n) la suite de fonctions continues définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3x^2(1-nx) & \text{si} \quad x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$. Que peut-on en déduire comme résultat sur la convergence uniforme de (f_n) ?
3. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1[$.
4. A-t-on

$$\lim_{a\to 0^+} \lim_{n\to+\infty} \int_a^1 f_n(t)\,dt \;=\; \lim_{n\to+\infty} \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 f_n(t)\,dt \quad ?$$

Exercice 5. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ où

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x)}\,, \quad x \geq 0.$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
   On note S sa fonction somme.
2. Pour $n \geq 1$, étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
   En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que la fonction somme S est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

4 On s'intéresse maintenant au comportement de S en $+\infty$.
On pose $\alpha = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. Montrer que pour $x > 0$,

$$S(x) - \alpha = -\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^3(1+n^2x)}\,.$$

5 En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = \alpha$.