Université de Tours
Licence de Mathématiques, L2

Année 2018-2019

Arithmétique: Session de rattrapage

L'épreuve dure 2 heures. Les exercices sont indépendants

Exercice 1.

1. Résoudre sur $\mathbb{Z}$ l'équation
$$3x + 7y = 5 \tag{1}$$
2. Montrer que l'équation (1) n'a pas de solution avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
3. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que tout entier $N > n$ peut s'écrire sous la forme $3x + 7y$ avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Exercice 2.

1. Calculer
$$5^{13} \quad (11)$$
2. Trouver une solution de l'équation
$$x^{13} \equiv 7 \quad (11)$$
3. Montrer que la solution est unique modulo 11.

Exercice 3.

Par définition, un entier positif n est parfait si la somme de ses diviseurs propres est égal à n ; par exemple $6 = 1 + 2 + 3$ est parfait.
On rappelle la définition de la fonction σ
$$\sigma : \begin{pmatrix} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \displaystyle\sum_{d \in \mathbb{N}^*, d|n} d \end{pmatrix} \tag{2}$$

1. Montrer que n est parfait ssi $\sigma(n) = 2n$

2. Montrer que
$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$
si p est premier et $k \in \mathbb{N}^*$

3. En déduire qu'aucune puissance d'un nombre premier n'est parfait.

4. Montrer que pour tous entiers m, n premiers entre eux
$$\sigma(m.n) = \sigma(m)\sigma(n)$$

5. On suppose dorénavant que n est pair, ie qu'il existe $k \geq 1$ et m impair tels que $n = 2^k m$, et que n est parfait. D'après les résultats précédents, montrer que
$$2^{k+1}m = (2^{k+1} - 1)\sigma(m)$$

6. En déduire qu'il existe c tel que
$$\sigma(m) = 2^{k+1}c \text{ et } m = (2^{k+1} - 1)c$$

7. On va montrer que $c = 1$ en raisonnant par l'absurde.
Supposons que $c > 1$, montrer que $\sigma(m) \geq 1 + c + m$. Montrer que c'est impossible.

8. En déduire que tout entier pair parfait est de la forme $2^k(2^{k+1} - 1)$ où $2^{k+1} - 1$ est premier (Euler).