Université de Tours
Licence de Mathématiques

# Contrôle continu 2

EP 2 : Arithmétique — Semestre 3

*L'épreuve dure 2h. Les 4 exercices sont indépendants. La notation tiendra compte de la clarté de la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée sauf mention explicite.*

**Exercice 1** (4 points) Vrai ou Faux (Justifier ou donner un contre exemple) :

1. Si un entier est divisible par deux entiers, alors il est divisible par leur produit.
2. Si un nombre est divisible par 10 et par 12, alors il est divisible par 15.
3. S'il existe deux entiers $u$ et $v$ tels que $au + bv = d$, alors $d = (a, b)$
4. Si $(a, b)$ divise $d$, alors il existe un unique couple d'entiers $(u, v)$ tel que $au + bv = d$.
5. Si le produit de deux entiers est congru à 0 modulo 5 alors l'un des deux est multiple de 5.
6. Si un entier est congru à 4 modulo 6 alors toutes ses puissances sont congrues à 4 modulo 6.

**Exercice 2** (4 points) On rappelle la définition de la fonction $\sigma$ :

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \sum_{d\in\mathbb{N}^*, d|n} d \end{array}$$

On supposera dans cet exercice que $\sigma$ est une fonction multiplicative, c'est-à-dire que si $(m, n) = 1$ alors $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$. On dit qu'un nombre est *déficient* si $\sigma(n) < 2n$, *parfait* si $\sigma(n) = 2n$ et *abondant* si $\sigma(n) > 2n$.

1. Déterminer la nature de 6, 12 et 19.
2. Montrer que tout entier premier est déficient.
3. Soit $p$ un nombre premier et $a \in \mathbb{N}$. Calculer $\sigma(p^a)$.
4. Soit $m$ un entier strictement positif tel que $2^m - 1$ est premier. Montrer que $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ est parfait.

**Exercice 3** (6 points)

1. Résoudre sur $\mathbb{Z}$ l'équation
$$3x + 5y = 4 \tag{1}$$
2. Montrer que l'équation (**??**) n'a pas de solution avec $x \geq 0, y \geq 0$.
3. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que tout entier $N > n$ peut s'écrire sous la forme $3x + 5y$ avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

**Exercice 4** (6 points)

1. Calculer

$$7^{37} \mod 11$$

2. Justifier l'existence d'une solution entière de la forme $7^a$ avec $a \in \mathbb{N}$ de l'équation :

$$x^{37} \equiv 7 \mod 11$$

3. Expliquer la méthode de chiffrement RSA de module $N$. On décrira :

   - la mise en oeuvre par 2 usagers : le chiffreur et le déchiffreur. On supposera ici pour simplifier que le message à envoyer est un entier $M \in \{0, \ldots, N-1\}$;
   - les propriétés mathématiques qui sont à la base de cette méthode de chiffrement.