Université de Tours
Licence de Mathématiques

Contrôle continu 1

EP 2 : Arithmétique — Semestre 3

L'épreuve dure 2h. Les quatre exercices sont indépendants. La notation tiendra compte de la clarté de la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée sauf mention explicite.

Exercice 1 On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

1. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2\backslash(0,0)$, on a $(a,b) = (a, a+b)$.

2. Montrer par récurrence sur n que $(u_n, u_{n+1}) = 1$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 2 Les équations suivantes admettent-elles des solutions entières ? Si oui lesquelles, si non pourquoi ?

1. $193x + 19y = 1$;

2. $12x - 15 \equiv 5 \mod 30$.

Exercice 3 Soit n un entier strictement positif. On dit qu'un entier $a \in \mathbb{Z}$ est inversible modulo n si et seulement si il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \equiv 1 \mod n$.

1. Montrer que 0 n'est pas inversible modulo n et que 1 est inversible modulo n.

2. Montrer que si a et a' sont inversibles modulo n alors aa' est inversible modulo n.

3. Montrer que a est inversible modulo n si et seulement si $(a,n) = 1$.

4. Calculer l'inverse de 5 modulo 7.

Exercice 4 On rappelle que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$

1. Soit p un nombre premier.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, le pgcd de k et p vaut 1.
   (b) Soit $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. On admet que $\binom{p}{k} \in \mathbb{N}$. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$.
   (c) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$ on a $a^p \equiv a \mod p$.
   (d) Montrer que $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ si et seulement si p ne divise pas a.

2. On souhaite démontrer la réciproque de 1.(a), c'est-à-dire :

   $$(*) \quad n \mid \binom{n}{k} \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n \Longrightarrow n \text{ est premier.}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre composé et soit p un de ses facteurs premiers.
   (a) Montrer que p ne divise aucun des entiers $n-1, n-2, \ldots, n-p+1$.
   (b) En déduire que p ne divise pas $\binom{n-1}{p-1}$ et que n ne divise pas $\binom{n}{p}$
   (c) Énoncer la contraposée de $(*)$ et conclure.