CONTROLE CONTINU COMMUN 2 D'ALGEBRE–DUREE 2h

**Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.**

**Les exercices proposés sont indépendants et on demande une rédaction claire et concise.**

**EXERCICE 1 (Questions de cours et QCM, réponses à justifier).** (Barème indicatif: 7 pts)

Parmi les assertions suivantes, ou les réponses à des questions, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses? Justifiez vos réponses par une démonstration ou par un contre-exemple selon le cas. Les questions posées ne demandent pas de longs développements.

I. (Questions de cours)

1. Soit $p$ une projection d'un e.v $E$. Montrer que $\mathrm{id}_E - p$ est une projection et que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice de blocs $A, B, C \text{ et } D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A-t-on $\det M = \det A \det D - \det C \det B$ ?

II. (Vrai ou Faux)

1. Soient $E$ un e.v réel de dimension finie $n \neq 0$ et considérons deux s.e.v $F$ et $G$ de $E$.
   i. Si $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ et si $x \notin F$ alors $x \in G$
   ii. Si $\dim F + \dim G = n$, alors $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$
2. i. Toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a au moins une valeur propre réelle.
   ii. Toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a au moins une valeur propre réelle.
   iii. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et supposons que 1 et 2 sont valeurs propres de $M$.
      a. Le polynôme caractéristique $P_M$ de $M$ est scindé dans $\mathbb{R}$.
      b. Si 1 et 2 sont les seules valeurs propres de $M$, alors cette dernière est diagonalisable.
      c. Si 1 et 2 ne sont pas les seules valeurs propres de $M$, alors cette dernière est diagonalisable.
3. Soient les trois matrices réelles :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   i. Les matrices $B$ et $C$ sont semblables.
   ii. Les matrices $A$ et $C$ sont semblables si et seulement si $a = 0$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que : $P_A = (X-1)^2\,(X+1)^2$. On a :
   i. $\det A = 1$.
   ii. $\mathrm{tr} A = 1$.

**EXERCICE 2.** (Barème indicatif: 5 pts)
Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels réels de dimensions respectives 3 et 2 et munissons $E$ d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3)$ et $F$ d'une base $\mathcal{B}_F = (\epsilon_1, \epsilon_2)$. Considérons $f \in L(E, F)$ telle que:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer, pour tout vecteur $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.
2. Posons $\mathcal{B}'_E = (e'_1 = e_1 + e_3, e'_2 = e_2 + e_3, e'_3 = e_1 + e_2)$ et $\mathcal{B}'_F = (\epsilon'_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon'_2 = 2\epsilon_1 - \epsilon_2)$. Vérifier que $\mathcal{B}'_E$ est une base de $E$ et que $\mathcal{B}'_F$ est une base de $F$.
3. Déterminer la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_F}(f)$.
4. Déterminer la matrice $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_F}(f)$.
5. Calculer, pour tout vecteur $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'_F$.

**EXERCICE 3.** (Barème indicatif: 8 pts)

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$\mathcal{M}at_{\mathfrak{B}_c}(f) = A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\mathfrak{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer le rang de $A - I_3$.
2. En déduire que 1 est une des valeurs propres de $f$ dont on précisera la dimension du sous-espace propre associé.
3. Calculer le polynôme caractéristique $P_f$ de l'endomorphisme $f$ et en déduire les valeurs propres de $f$.
4. Montrer que l'endomorphisme $f$ n'est pas diagonalisable mais trigonalisable.
5. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
6. Trigonaliser l'endomorphisme $f$ et en déduire une une matrice $T$ triangulaire supérieure et une matrice $P$ inversible telles que $T = P^{-1} A P$.
7. Calculer pour tout entier $k \geq 3$, la matrice $A^k$ (**Attention!** Il vous est demandé l'expression explicite de tous les coefficients de $A^k$ en fonction de $k$)