Université de Tours
Mathématiques

Licence 2ème année
2018 – 2019

Contrôle Continu - Novembre 2018

Durée : 2 h
Documents et calculatrices interdits

1. Questions de cours

1. . Les trois assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Une preuve concise justifiera le vrai ; un contre-exemple précis le faux.
   i. L'application f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (xy, 0)$ est linéaire.
   ii. Toute application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ est surjective.
   iii. Aucune application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ ne peut être injective.
   iv. Toute application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ est surjective.
2. . Soit $f \in L(E, F)$ où E et F sont des $\mathbb{R}$-e.v de dimensions finies respectives n et m.
   i. Définir son noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et prouver que c'est un s-e.v de F.
   ii. Définir le rang de f, $rg(f)$, et établir l'inégalité : $rg(f) \leq Min(n, m)$.
   iii. Supposons que $E = F$ et soit $g \in L(E)$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Montrer que f est un automorphisme et que $f^{-1} = g$.

2. On considère dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants

$$v_1 = (3, 0, 2)\,,\ v_2 = (4, -1, 3)\,,\ v_3 = (1, -1, 1)\,,\ v_4 = (1, 1, 1)\,,\ v_5 = (2, -1, 1)\,,\ v_6 = (5, -1, 3)$$

et les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $E = \mathrm{Vect}\,\{v_1, v_2, v_3\}$ et $F = \mathrm{Vect}\,\{v_4, v_5, v_6\}$.

1. Extraire de la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ une base de E, puis donner la dimension de E.
2. Extraire de la famille $\{v_4, v_5, v_6\}$ une base de F, puis donner la dimension de F.
3. Caractériser E et F par des équations linéaires.
4. Trouver une base de $E \cap F$.
5. Donner la définition de $E + F$, déduire sa dimension de la question précédente puis en donner une base.
6. les sous-espaces E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

3. 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (3x + 9y - 9z, 2x, 3x + 3y - 3z).$$

   i. Trouver une base de $Im(f)$. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
   ii. Trouver une base de $Ker(f)$. L'endomorphisme f est-il injective ?
   iii. Calculer explicitement $f^2 := f \circ f$.
   iv. Donner une base de $Ker(f^2)$.

v. Comparer $Ker(f)$ et $Ker(f^2)$.

vi. Calculer f^3 puis $Ker(f^3)$.

2. Soient E un e.v réel de dimension n et $f \in L(E)$.
   i. Montrer que $Ker(f) \subset Ker(f^2) \subset Ker(f^3)$.
   ii. Montrer que $Im(f^3) \subset Im(f^2) \subset Im(f)$
   iii. Montrer l'équivalence :

$$Ker(f) = Im(f) \Longleftrightarrow f^2 = O_{L(E)} \text{ et } n = 2\,rg(f)$$