EXAMEN D'ALGEBRE–SESSION 2 (juin 2019)–DUREE 2h

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.
Les exercices sont indépendants et on demande une rédaction claire et concise.

EXERCICE 1. (Questions de cours)(Barème 5 pts)
Soient E et F deux e.v réels de dimension finie et $f \in L(E, F)$.

1) Montrer que si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice de E alors
$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$$

2) Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E.
A quelle condition sur f, la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$ est-elle une base de F? (la réponse doit être justifiée par une preuve)

3) Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leq \min\{\dim E, \dim F\}$.

EXERCICE 2. (QCM)(Barème 5 pts)

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ? Justifiez vos réponses par une démonstration ou par un contre-exemple selon le cas.

1) Soient E un e.v réel et $f, g \in L(E)$.
   i) $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.
   ii) $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow f \circ g = 0_{L(E)}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   i) La matrice A est diagonalisable si et seulement si $a = b = 0$.
   ii) La matrice A est diagonalisable si et seulement si $c = 0$.
   iii) La matrice A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
   iv) La matrice A est diagonalisable si et seulement si a, b et c ne sont pas tous nuls.

3) Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Si $C \neq 0$, alors on a : $(AC = BC \Longrightarrow A = B)$.

EXERCICE 3. (Barème 10 pts)
Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que :
$$\mathcal{M}at_{\mathfrak{B}_c}(f) = A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
où $\mathfrak{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Tournez s'il vous plaît

1) Calculer le polynôme caractéristique de A. Puis en déduire que f a une valeur propre triple λ que l'on précisera.

2) Déterminer le rang de $A - \lambda.\mathbb{I}_3$. En déduire que le sous-espace propre $E_f(\lambda)$ est de dimension 1.

3) Montrer que f n'est pas diagonalisable mais trigonalisable.

4) Déterminer f^2 puis f^3.

5) Montrer que $e_1 = (1, 0, 0) \notin \mathrm{Ker}((f - \lambda.\mathrm{id})^2)$.

6) On pose $\mathfrak{B}' = (((f - \lambda.\mathrm{id})^2)(e_1), (f - \lambda.\mathrm{id})(e_1), e_1)$. Vérifier que $\mathfrak{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis trouver la matrice $T = \mathcal{M}at_{\mathfrak{B}'}(f)$.

7) Donner une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $T = P^{-1}\, A\, P$.

8) Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (Attention! on demande l'expression explicite de A^k en fonction de k)

□