L1S2 Economie — Université de Tours
Année 2018-2019
Responsable : E. Chasseigne

Examen Première Session

Jeudi 2 Mai 2019, 14h—16h

Exercice 1 — Soit $f(x) := x^2 e^{-x^2}$ que l'on souhaite étudier sur $I = [-2; +2]$.

1. Démontrer que f admet trois points critiques dans I et déterminer leur nature sans faire le tableau de variations.
2. Déterminer le maximum global de f et son minimum global sur I et préciser en quels points ceux-ci sont atteints.
3. Faire le tableau de variations de f et vérifier la cohérence avec les informations obtenues en 1. et 2.
4. Tracer une allure du graphe de f sur l'intervalle I.

Exercice 2 — Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (paramètre fixé), on considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x, y) = \lambda x^2 + y^2 + 2xy - 3\,.$$

1. Démontrer que si $\lambda \neq 1$, $A(0, 0)$ est l'unique point critique de f.
2. Déterminer la nature de A pour $\lambda > 1$.
3. Déterminer la nature de A si $\lambda < 1$.
4. [BONUS] Dans le cas $\lambda = 1$, démontrer que $f_1(x, y) = (x + y)^2 - 3$ et en déduire que f atteint son minimum global en chaque point de la droite $y = -x$.

Exercice 3 — On considère la fonction $f(x, y) := x^{3/2} y^{1/2}$ dans le domaine D délimité par le quart de disque de rayon 2 centré en l'origine tel que $x, y \geq 0$.

1. Placer sur un même graphique le domaine D et les lignes de niveau $k = 1$ et $k = 2$ de la fonction f.
2. Déterminer le maximum global de f dans le domaine D et placer le point où ce maximum est atteint sur le graphique. On précisera les différentes étapes de la méthode pour déterminer le maximum global.