UNIVERSITE DE TOURS /**Faculté des Sciences & Techniques**

LICENCE de MATHEMATIQUES (L1)

Année universitaire 2018-2019 – semestre 2 **Module 2.2 - Suites et fonctions**
Durée : 2h

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé durant l'épreuve. Il est demandé de rédiger des réponses, et lorsque c'est utile de citer des énoncés clairs dans le cadre de démonstrations précises.

Exercice 1 (4 points)
Pour $|x| < 1$, on considère la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$.
1. Montrer brièvement que cette fonction est de classe C^∞ en rappelant la définition.
2. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4, puis les valeurs en $x_0 = 0$ de ces dérivées.
3. Ecrire la fomule de Taylor-Young pour f à l'ordre 4.
4. Sans démonstration donner, pour un réel α quelconque, le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $g(x) = (1+x)^\alpha$.

Exercice 2 (4 points)
1. Ecrire la définition d'une fonction convexe sur un intervalle. Comment caractériser une fonction concave de classe C^2 sur un intervalle ?
2. Montrer que la fonction logarithme népérien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ est concave et en déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{+*n} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n} \geq \Big(\prod_{k=1}^{n} a_k \Big)^{\frac{1}{n}}$$

3. Comment s'écrit ce résultat pour $n = 2$ et comment peut-on l'obtenir autrement ?

Exercice 3 (8 points)
1. Sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, faire l'étude complète de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4x+5}{x+3}$; déterminer ses variations, les limites aux bornes de D. Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = 0$. Tracer la courbe représentative (C) de f ainsi que ses éventuelles asymptotes et (T) dans un repère **judicieux**.
2. On veut étudier maintenant la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Faire une **nouvelle** figure dans un repère orthonormé d'unité 2cm de la partie de la courbe (C) qui correspond à $x \in [0, 5]$. Placer également sur cette figure la droite Δ d'équation $y = x$, puis indiquer les premiers termes de la suite (u_n).
3. Que peut-on conclure de certaines des propriétés de f pour la suite (u_n). Cette suite est-elle monotone ? est-elle convergente ? si oui quelle est sa limite.

Exercice 4 (4 points)
1. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0
de la fonction $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
2. Pour cette même fonction g donner un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $x_1 = 1$.
3. En utilisant la première question, calculer la limite éventuelle en 0
de la fonction $h(x) = \dfrac{1}{x}(g(x) - \cos x)$.

Le barème mentionné est seulement indicatif