UNIVERSITE DE TOURS /**Faculté des Sciences & Techniques**

LICENCE de MATHEMATIQUES (L1)

année universitaire 2018-2019 – semestre 2

Module 2.2 - Suites et fonctions -
Contrôle Continu CC1

Durée : 1 heure
Tous les documents manuscrits ou imprimés, tous les appareils électroniques (calculatrices, téléphones,...) sont interdits d'usage et de consultation.
L'objectif de la licence de Mathématiques est de savoir REDIGER des preuves !

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes où a et α sont des réels :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x > 0 \\ \alpha(x-a)^2 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

1. Pour quelles raisons la fonction f est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$?
2. A quelle condition liant α et a, f est-elle continue en $x_0 = 0$?
3. Dans ce cas, quelle condition supplémentaire faut-il pour que f soit dérivable pour tout x réel ? Cela est-il possible ? Si oui pour quelle(s) valeur(s) des réels a et α ?

Exercice 2 Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle ouvert I, écrire la formule donnant pour la fonction produit $f.g$ sa n^{ime} dérivée sur cet intervalle.
Mettre en oeuvre ce résultat pour écrire à l'ordre n la dérivée de $\varphi(x) = x^3 e^{2x}$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\frac{x}{2})$$

1. Etablir que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = f(\frac{x}{2^n})$
2. Montrer - en utilisant l'hypothèse de continuité à l'origine - que la fonction f est constante : $f(x) = f(0)$ pour tout x.

Exercice 4 On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n+b_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 7 \\ b_{n+1} = \frac{a_n+2b_n}{3} \end{cases}$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = b_n - a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n et préciser la limite de u_n.
3. Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = a_n + b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire la limite des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

BAREME indicatif 5 - 5 - 4 - 6