Exercice 1 : (représentation graphique de fonctions et utilisation pratique)
On considère les fonctions $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \exp(-x) \quad , \quad g(x) = x \quad \text{pour tout } x \geq 0 \; .$$

1. Donner la représentation graphique des deux fonctions f et g sur l'intervalle $[0, 10]$ sur le même graphique.
2. En déduire (graphiquement) que l'équation $f(x) = g(x)$ a une unique solution $\bar{x}$.
3. En programmant des zooms sur le graphe des deux fonctions, donner $\bar{x}$ à 10^{-3} près.

Exercice 2 : (suites récurrentes)
On considère la suite récurrente :

$$x_{n+1} = f(x_n) \; , \; x_0 > 0 \; ,$$

où f est la fonction de l'exercice 1.

1. Écrire une fonction de x_0 et de n qui donne la liste des n premiers termes de la suite.
2. Que pensez-vous du comportement de la suite pour $x_0 = 0.5$, $x_0 = 3$, $x_0 = 5$: a-t-on convergence et si oui quelle est la limite ?
3. Mettre graphiquement en évidence la convergence ou la non-convergence de cette suite en construisant les segments liant les points (x_0, x_0) à (x_0, x_1) puis (x_0, x_1) à (x_1, x_1) puis (x_1, x_1) à (x_1, x_2) puis $\cdots$ (x_n, x_n) à (x_n, x_{n+1}) puis (x_n, x_{n+1}) à (x_{n+1}, x_{n+1})...etc .

Exercice 3 : (modélisation aléatoire)
On s'intéresse au jeu suivant : on effectue 100 lancers d'une pièce de monnaie. Si on obtient K fois "pile" consécutivement, on gagne 10 euros ; sinon on perd 1 euro. On suppose que le tirage est sans biais donc que la probabilité de tomber sur "pile" est 0.5 et celle de tomber sur "face" est 0.5 également.

1. Simuler le jeu en écrivant une fonction qui effectue les 100 tirages aléatoires et qui renvoie le gain ou la perte à la fin du jeu (on pourra créer un compteur qui accumule le nombre de "pile" consécutifs obtenus).
2. Accepteriez-vous de jouer à ce jeu pour $K = 6, 5, 4$? (on pourra estimer la moyenne des gains qui est la limite, quand n tend vers l'infini, de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i$ où n est le nombre de fois où l'on joue et g_i est le gain ou la perte à la $i^{\text{ème}}$ partie.)

Exercice 4 : Manipulation de matrices
Écrire une fonction dont l'argument est une matrice M, qui vérifie que M est carrée (sinon on renvoie 'erreur'), puis fait la somme des termes de la deuxième diagonale, i.e. si M est de taille $n \times n$

$$\sum_{i=1}^{n-1} M_{i,n-i+1} \; .$$