

Université de Tours 2018-2019

L2S4 Modélisation

TP noté de rattrapage :

Calcul approché de la solution d'une équation par deux méthodes

Les réponses aux questions mathématiques indiquées en *italiques* doivent se faire *sur cette feuille* qui devra être rendue.

Nom-Prénom :

Groupe :

On s'intéresse à la fonction :

$$y(t) = \exp\left(\int_0^t s \cos^2(s) ds\right),$$

et on souhaite déterminer de manière approchée la solution \bar{t} de l'équation :

$$y(t) = 2.$$

I. Un peu de théorie : On suppose que $y(10) > 2$.

1. *Prouver qu'il existe une unique solution de l'équation dans l'intervalle $[0, 10]$.*

II. Première méthode numérique :

2. Écrire une fonction Python qui prend en arguments t et K et qui renvoie une approximation de $\int_0^t s \cos^2(s) ds$ par la méthode des rectangles en utilisant les points de discrétisation $s_k = \frac{k}{K}t$.

3. Pour $K = 10\,000$, en déduire une approximation $y_K(t)$ de la fonction $y(t)$ puis résoudre l'équation $y_K(t) = 2$ via la méthode de dichotomie. *Quel est théoriquement le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une approximation de la solution à 10^{-4} -près ?*

III. Deuxième méthode numérique :

4. Prouver que la fonction y satisfait l'équation différentielle :

$$y'(t) = t \cos^2(t)y(t) \quad , \quad y(0) = 1 .$$

5. Montrer que si $t \mapsto z(t)$ est une autre solution de l'équation différentielle ci-dessus, alors la fonction $\psi(t) = \exp(-\int_0^t s \cos^2(s) ds)z(t)$ est constante. En déduire l'unicité.

6. En utilisant une méthode d'Euler, écrire une fonction Python qui prend t et N en argument et qui renvoie la liste des valeurs approchées de $y(t_i)$ aux points $t_i = ih$ pour $h = t/N$ et $i = 0, 1, \dots, N$.

7. Résoudre l'équation $y(t) = 2$ de manière approchée à l'aide de cette fonction via une méthode de dichotomie.

8. Comment pourrait-on modifier la fonction construite à la question 6. pour que la méthode d'Euler utilisée pour le calcul de la valeur approchée de $y(10)$ renvoie une valeur approchée de \bar{t} sans passer par la méthode de dichotomie? Faites cette modification et tester pour $N = 10^4$.

9. **Question bonus :** Programmer une fonction qui donne les 20 premiers termes de la suite récurrente :

$$t_{n+1} = t_n - \frac{y_K(t_n) - 2}{y_K(t_n)t_n \cos^2(t_n)} \quad , \quad t_0 = 10,$$

où $y_K(t)$ est la fonction obtenue en question 2.

Qu'observez-vous ? Pourquoi cette méthode donne-t-elle un tel résultat ?