# Université de Tours 2018-2019
# L2S4 Modélisation
# TP noté n$^{\text{o}}$ 2 :
# Calcul approché de la solution d'une équation différentielle et application

**Les réponses aux questions mathématiques indiquées en** *italiques* **doivent se faire** *sur cette feuille* **qui devra être rendue.**

---

**Nom-Prénom :** **Groupe :**

---

On fait rouler une bille sur un rail rectiligne modélisé par l'intervalle $[0, +\infty[$ : elle se trouve à la position $X(0) = 0$ au temps $t = 0$ et on la lance avec une certaine vitesse $v > 0$. Dans toute la suite, le temps $t$ sera exprimé en secondes, l'unité de longueur sera le mètre et la vitesse sera exprimée en mètres par seconde. On notera respectivement par $X(t)$ et $Y(t)$ la position de la bille sur le rail et sa vitesse à l'instant $t$.

**Problème : On souhaite déterminer quelle doit être la vitesse initiale $v$ pour que la bille ait exactement parcouru 1 mètre en 20 secondes.**

**I. Premier modèle :** On suppose que le ralentissement subi par la bille est simplement proportionnel à sa vitesse de telle sorte que les fonctions $X$ et $Y$ sont solutions de :

$$\begin{cases} X'(t) &= Y(t) \\ Y'(t) &= -0,5\,Y(t), \end{cases}$$

avec $X(0) = 0$ et $Y(0) = v$.

1. *Calculer explicitement $Y(t)$ puis $X(t)$.*

2. *En déduire la solution au problème ci-dessus.*

**II. Deuxième modèle :** On suppose cette fois que le ralentissement est d'autant plus important que $X(t)$ augmente (par exemple à cause de certaines particularités du rail). Ceci conduit aux équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X'(t) & = & Y(t) \\ Y'(t) & = & -0,5\,Y(t)X(t) \end{array}\right.$$

avec $X(0) = 0$ et $Y(0) = v$.

1. En utilisant une méthode d'Euler, écrire une fonction Python qui prend $v$ en argument et qui renvoie la liste des valeurs approchées de $X(t)$ et $Y(t)$ aux points $t = 0,\ h,\ 2h, \ldots,\ 1000h$ pour $h = 20/1000$.

2. Pour une vitesse initiale $v = 1$, trouver graphiquement le temps $t$ tel que $Y(t) = \dfrac{v}{2}$ (on affichera le graphe de $Y(t)$ à l'aide des valeurs approchées obtenues à la question précédente).

3. *Montrer que la fonction* $H : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ *définie par* $H(t) = \dfrac{0,5}{2}[X(t)]^2 + Y(t)$ *est constante.*

4. Vérifier graphiquement le résultat du 3. en utilisant Python.

5. Construire une fonction $S(v)$ qui renvoie la valeur approchée de $X(20) - 1$ pour la vitesse initiale $v$. Répondre au problème posé en introduction pour ce deuxième modèle (on mettra en place une méthode numérique à l'aide de Python).