

Université de Tours 2018-2019

L2S4 Modélisation

TP noté n° 1 :

Calcul approché de la solution d'une équation intégrale

Les réponses aux questions mathématiques indiquées en *italiques* doivent se faire *sur cette feuille* qui devra être rendue.

Nom-Prénom :

Groupe :

On admet que $\int_0^5 \exp(-t^2) dt > 0.8$. On souhaite trouver une approximation du réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\int_0^\alpha \exp(-t^2) dt = 1/2 .$$

1. *En introduisant la fonction :*

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2) dt - 1/2 ,$$

justifier l'existence et l'unicité de α .

2. On note f_N la fonction où l'intégrale est approchée via une méthode des trapèzes utilisant les points $x_i = \frac{i}{N}x$. Écrire la fonction Python qui, quand on se donne x et N , calcule $f_N(x)$.

Dans toute la suite, on suppose que N est fixé. Vous pourrez décider de prendre $N = 100$ ou $N = 1000$.

3. Donner la représentation graphique de la fonction $x \mapsto f_N(x)$ sur $[0, 5]$ et estimer graphiquement la valeur de α (on pourra éventuellement affiner l'estimation en donnant la représentation graphique sur un intervalle plus petit).

4. Mettre en place une méthode de dichotomie et estimer la solution de $f_N(x) = 0$ à 10^{-4} près. Combien d'itérations doit-on demander à la méthode de dichotomie pour être sûr d'avoir cette précision ?

5. Rappeler ce qu'est la méthode de Newton pour résoudre une équation du type $g(x) = 0$ puis écrire une fonction Python prenant en arguments une fonction g , sa dérivée g' , un point de départ x_0 , un entier $P > 0$ et donnant les P premiers termes de cette méthode.

6. Nous allons appliquer cette fonction à $g = f_N$ mais en prenant la fonction $\exp(-x^2)$ à la place de g' . Comment ce choix simplificateur peut-il s'expliquer ?

7. Faire plusieurs tests de cette méthode de Newton pour différentes valeurs du point de départ. Que constatez-vous ?