Université de Tours
UFR Sciences et Techniques

L1 MPI
Année 2019-2020

M2.1 - Algèbre 2 - Structures de base

—

Examen Partiel du 13 mars 2020 (Durée : 1h30)

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
Les exercices proposés sont indépendants. Il est demandé de soigner la rédaction des réponses.

Question de cours. Soit $(A, +, .)$ un anneau. On note 1_A l'élément unité de cet anneau.

1. Donner la définition de l'inversibilité d'un élément a de l'anneau A.
2. On note B l'ensemble des éléments inversibles de A. Montrer que $(B, .)$ est un groupe.

Exercice 1. On définit sur $\mathbb{R}$ deux lois $\oplus$ et $\otimes$ par :

$$x \oplus y = x + y - 1 \quad \text{et} \quad x \otimes y = x + y - xy.$$

1. Vérifier que les lois $\oplus$ et $\otimes$ sont des lois de compositions internes sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que les lois $\oplus$ et $\otimes$ sont commutatives.
3. Montrer que les lois $\oplus$ et $\otimes$ sont associatives.
4. Montrer que la loi $\oplus$ a un élément neutre dans $\mathbb{R}$.
5. $(\mathbb{R}, \oplus)$ est-il un groupe ?
6. Montrer que la loi $\otimes$ est distributive par rapport à la loi $\oplus$.
7. La loi $\otimes$ a-t-elle un élément neutre sur $\mathbb{R}$? Qu'en déduisez-vous sur la nature de $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$?
8. En justifiant proprement votre réponse, dire si $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps.

Exercice 2. Soit $\sigma = (1, 2, 7).(3, 7).(1, 2, 5)$ une permutation de $\mathcal{S}_7$.

1. Donner l'écriture matricielle de σ ainsi que son support. Mêmes questions pour σ^{-1} et σ^2.
2. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints. En déduire la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de σ^{-1}.
3. Déterminer une écriture de σ en produit de transpositions.
4. Déterminer la signature de σ en explicitant bien la méthode choisie.
5. A-t-on $\sigma = (1, 2).(3, 7).(1, 5).(2, 7)$?
6. Déterminer l'ordre de σ puis calculer σ^{33}.

Exercice 3. Soit $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$. On rappelle que $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau.

1. Définir $\overline{5}$.
2. Construire la table de Cayley de $(Z/6\mathbb{Z}, \times)$. En justifiant vos réponses : $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$ est-il un corps ? un anneau intègre ? un anneau commutatif ?
3. L'ensemble $H = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$?
4. Développer et réduire dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $(\overline{x} + \overline{3})^2$, pour tout $\overline{x} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en discutant suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$(S) : \begin{cases} 3x + \ \ y - \ \ z = 1 \\ \ \ x - 2y + 2z = m \\ \ \ x + \ \ y - \ \ z = 1 \end{cases}.$$

Vous veillerez à appliquer la méthode du pivot de Gauss de manière rigoureuse en détaillant les étapes de calculs.

Fin du sujet