Université de Tours **L1 MPI**
UFR Sciences et Techniques **Année 2019-2020**

M2.1 - Algèbre 2 - Structures de base

—

Examen de rattrapage du 7 juillet 2020 (Durée : 1h)

Les exercices proposés sont indépendants. Il est demandé de soigner la rédaction des réponses.

Questions de cours. Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Donner la définition d'une famille libre $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E.
2. Montrer qu'une famille finie $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E contenant le vecteur nul n'est pas libre.
3. Donner la définition de la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Exercice 1. **Vrai ou faux.** Dire si les énoncés ci-dessous sont vrais ou faux. Lorsque l'énoncé est vrai, rédiger une preuve, lorsqu'il est faux, donner un contre-exemple. Toute réponse non justifiée se verra attribuer la note zéro.

1. L'ensemble $F = \left\{ \frac{1+2n}{1+2m} \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Q}^*, \times)$ où $\times$ désigne la multiplication classique sur $\mathbb{R}$.
2. L'application Φ définie par $\Phi(x) = 3x$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ où $\times$ désigne la multiplication classique sur $\mathbb{R}$..
3. L'ensemble $H = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.
4. On se place dans le groupe $\mathcal{S}_6$ muni de la composition. La permutation $\sigma = (1, 6, 3, 4).(2, 5, 3).(6, 2, 4, 5).(4, 6, 1)$ a pour support $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
5. On se place dans le groupe $\mathcal{S}_7$ muni de la composition. La permutation $\sigma = (1, 2)(3, 4, 2).(2, 5, 6, 7)$ est d'ordre 12.
6. On se place dans le groupe $\mathcal{S}_8$ muni de la composition. La signature de $\sigma = (3, 4, 5, 8, 2).(2, 1, 6, 8).(4, 7).(7, 2, 1)$ est 1.

Exercice 2. Soient $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 2, -3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 0\}$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.

1. Montrer à l'aide d'une des deux caractérisations du cours que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base de E.
3. La famille (u, v, w) est-elle une famille libre ? A-t-on $w \in F$?
4. A-t-on $w \in E$?
5. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels x, y et z pour que le vecteur (x, y, z) appartienne à F.

Exercice 3. Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, z)$.

1. Démontrer que l'application f est une application linéaire.
2. Rappeler la définition du noyau de f puis en déterminer une base.
3. Rappeler la définition de l'image de f puis la déterminer.
4. L'application linéaire f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Fin du sujet