M2.1 - Algèbre 2 - Structures de base

—

Examen de rattrapage du 18 juin 2019 (Durée : 2h)

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
Les exercices proposés sont indépendants. Il est demandé de soigner la rédaction des réponses.

Questions de cours. Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Donner la définition d'une famille génératrice $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E.
2. Montrer qu'une famille finie $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E contenant deux fois le même vecteur n'est pas libre.
3. Donner la définition de la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
4. Soit f une application de E dans F. Donner la définition de la linéarité de f.
5. On suppose que f est linéaire. Définir son noyau et son image. Montrer que l'image de f est un sous-espace vectoriel de F.
6. Donner la définition du rang de l'application linéaire f.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$u_1 = (2, 3, -1), u_2 = (1, -1, -2)$$

et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$v_1 = (3, 7, 0), v_2 = (5, 0, -7)$$

sont les mêmes.

Exercice 2. Soit U le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}.$$

Soit ensuite V l'ensemble

$$V = \{(a + b - c, 2b, a + b - c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en utilisant la méthode que vous souhaitez.
2. Donner une base de l'espace vectoriel U ainsi que sa dimension.
3. Donner une base de l'espace vectoriel V ainsi que sa dimension.
4. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels x, y et z pour que le vecteur (x, y, z) appartienne à V.
5. En justifiant votre réponse, $U \cap V$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui, donnez-en une base et en déduire sa dimension.
6. Donner la définition de $U + V$ puis en donner une famille génératrice.

Exercice 3. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x, y, x + y)$.

1. Démontrer que l'application f est une application linéaire.
2. Déterminer son noyau.
3. Déterminer une base de son image et donner son rang.
4. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Tournez la page s.v.p. . .

Exercice 4. Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère trois vecteurs $u = (1, -2, 0)$, $v = (-3, 5, 1)$ et $w = (0, 0, 1)$.

1. Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. On note D cette matrice.
3. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
4. Sans calcul, donner une relation matricielle entre les matrices A, D et P.

Fin du sujet