M2.1 - Algèbre 2 - Structures de base

—

Examen final du 7 mai 2019 (Durée : 2h)

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
Les exercices proposés sont indépendants. Il est demandé de soigner la rédaction des réponses.

Questions de cours. Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Donner la définition d'une famille liée $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E.
2. Montrer qu'une famille finie $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E contenant le vecteur nul n'est pas libre.
3. Donner la définition de la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
4. Soit f une application de E dans F. Donner la définition de la linéarité de f.
5. On suppose que f est linéaire. Définir son noyau et son image. Montrer que le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.
6. Donner la définition du rang de l'application linéaire f.

Exercice 1. Soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -2, -1)$ et $w = (1, 1, -1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}(u, v)$.

1. Montrer à l'aide d'une des deux caractérisations du cours que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base de E.
3. La famille (u, v, w) est-elle une famille libre ? A-t-on $w \in F$?
4. A-t-on $w \in E$?
5. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels x, y et z pour que le vecteur (x, y, z) appartienne à F.
6. En justifiant votre réponse, $E \cap F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui, donner une ou plusieurs équations qui caractérisent $E \cap F$.
7. En justifiant votre réponse $E \cup F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
8. Définir $E + F$ puis en donner une famille génératrice.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 4, 1, 5)$, $u_3 = (2, 2, -2, 0)$ et $u_4 = (-1, 0, 1, 1)$.

1. Définir $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ ainsi que le rang de la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4).
2. En utilisant la méthode d'échelonnement, déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) et donner une base de F.

Exercice 3. Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x - z)$.

1. Justifier que f est linéaire.
2. Sans justification, donner la matrice A représentative de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer l'image de f et donner le rang de f.
4. Déterminer le noyau de f puis en donner une base et sa dimension.

Tournez la page s.v.p. . .

Exercice 4. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ et $u_3 = (2, -2, 1)$. On admet que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
2. Calculer P^{-1} en résolvant le système linéaire associé. En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par $f(e_1) = (1, -1, 0)$, $f(e_2) = (4, -3, 2)$ et $f(e_3) = (4, -3, 3)$. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. On note B la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$. Rappeler la formule de changement de bases puis déterminer la matrice B.
5. Déterminer la matrice C représentant fof dans la base $\mathcal{C}$.

Fin du sujet