Université de Tours **L1 MPI**
UFR Sciences et Techniques **Année 2018-2019**

M2.1 - Algèbre 2 - Structures de base

—

Examen Partiel du 13 mars 2019 (Durée : 1h30)

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
Les exercices proposés sont indépendants. Il est demandé de soigner la rédaction des réponses.

Question de cours. Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $*$. On suppose que $*$ est associative et admet un élément neutre e.
Montrer que si x et y sont deux éléments symétrisables de E alors $x * y$ est symétrisable et donner son symétrique.

Exercice 1. Soient $F = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ et $F^* = F \setminus \{0\}$.

1. Montrer que $1 \in F^*$.
2. On rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^2$, $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$.
3. Montrer que si $x \in F^*$ alors $\frac{1}{x} \in F^*$.
4. Montrer que si $x, y \in F^*$ alors $x.y \in F^*$.
5. En déduire que F^* est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, .)$.
6. **Bonus :** On considère l'application

$$\varphi \colon \begin{cases} F^* & \to F^* \\ a + b\sqrt{2} & \mapsto a - b\sqrt{2} \end{cases}.$$

   Montrer que φ est un endomorphisme du groupe $(F^*, .)$.

Exercice 2. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_7$.

1. Sans justification, donner le cardinal de $\mathcal{S}_7$ puis l'écriture matricielle de σ^{-1} et σ^2.
2. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
3. En déduire deux décompositions différentes de σ en produit de transpositions.
4. Calculer la signature de σ par deux méthodes différentes.
5. Donner l'ordre de σ.
6. Déterminer σ^{2001}.

Exercice 3. Soit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$.

1. On rappelle que $(Z/4\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau. Qu'en déduisez-vous pour $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$?
2. Définir $\overline{2}$.
3. Construire la table de Cayley de $(Z/4\mathbb{Z}, \times)$. En justifiant vos réponses : $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, \times)$ est-il un corps ? un anneau intègre ?
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\overline{x}^2 = \overline{x}$ et $\overline{2} \times \overline{x} = \overline{2}$.

Exercice 4. Résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, en discutant suivant les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(S) \colon \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 3x - 2y + z = 5 \\ 2x + 2y - 6z + 3t = 3 \\ 3y - 6z + 2t = \lambda \end{cases}.$$

Fin du sujet