Université de Tours | L1 MPI
Mathématiques | 2018-2019

Contrôle continu de raisonnement - 18 décembre 2018

Durée : 1h

Sans documents ni calculatrices

Questions de cours.

1. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de F. Donner la définition de $f^{-1}(A)$. On attend une réponse de la forme

$$f^{-1}(A) = \{..................\}.$$

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Exercice 1. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application injective. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Exercice 2. On considère le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - x + 2$.

1. Montrer que -2 est racine de P.
2. En déduire une factorisation $P = AB$ avec A de degré 1 (on donnera A et B explicitement).
3. Calculer les racines complexes de B.
4. Donner la décomposition de P en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{4^k}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $n \leq 2^n$.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 2$.
4. Que peut-on en conclure ?