Université de Tours **Novembre 2018**
L2 Mathématiques **Analyse**

Contrôle Continu no. 1. Durée 2h.

Documents et calculatrices interdits. Barème indicatif sur 23 pts.
On attend une justifcation précise et concise à chaque étape de résolution.

Exercice 1 *(7 pts)*

1.(a) Calculer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \frac{\ln n - \cos^2(n!)}{\ln(n^3) + \sqrt{n}}\ , \qquad b_n = \sqrt{9 + \cos(n)\, \sin(\frac{1}{n})}\ , \qquad c_n = \Big(1 + \frac{1}{4^n}\Big)^{n \ln n}$$

2.(a) Montrer que $\sin\Big(\frac{1}{n}\Big) \ln n = o(1)$.

(b) Montrer que $e^{1/n^2} - n\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n}$.

3. Calculer $\liminf\limits_{n\to+\infty}$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty}$ de la suite de terme général $d_n = \cos\Big(\frac{\pi}{n}\Big) + \cos\Big(\pi\, n\Big)$.

Exercice 2 *(6.5 pts)*

1.(a) Calculer l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt$$

(b) Peut-on montrer plus simplément la convergence de cette intégrale ?

2.(a) Montrer que $e^{-t^2} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ ou bien que $e^{-t^2} = o_{+\infty}(e^{-t})$.

(b) En déduire la convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} e^{-t^2}\, dt.$$

(d) Justifier la positivité et la décroissance des fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
En déduire une seconde preuve de convergence pour la même intégrale.

Exercice 3 *(9.5 pts)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [0,1], \qquad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Dans cette partie, il s'agit d'étudier la convergence de cette suite récurrente.

(a) Montrer que f est monotone sur $I = [0,1]$ est $f(I) \subset I$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone décroissante et convergente.

(c) Déterminer sa limite.

2. *Dans cette partie, on s'intéresse à la vitesse de la convergence de u_n vers sa limite.*
On se permettra d'admettre toute question qu'on ne parviendra pas à traiter complétement.

On fixe $u_0 = 1$.

A.1 Soit k un entier naturel non nul. Montrer que $f\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{1+k}$.

A.2 En déduire par récurrence que $u_n \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

B.1 Soit k un entier naturel non nul. Exprimer $\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}$, en fonction de u_k et montrer que

$$\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \leq 1 + \frac{1}{k+1}. \qquad (*)$$

B.2 En remplaçant successivement k par $0, 1, ..., n-1$, dans l'inégalité $(*)$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{u_n} \leq 1 + n + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

B.3 On admettra ici[1] que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

C.1 En combinant les résultats des parties **A.**, **B.**, trouver un encadrement pour $\frac{1}{nu_n}$.

C.2 En déduire que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

1. Bonus++ : le justifier, en utilisant la comparaison série-intégrale