Université de Tours 2018/2019

L2-Math : Analyse 3

Examen : seconde session

Durée : 2 heures

Les documents et les dispositifs électroniques de calcul (calculatrices, smartphones,...) sont interdits.

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants. La plupart des questions peuvent être traitées sans avoir su répondre à la précédente. Le correcteur tiendra compte de la qualité de rédaction.

Exercice 1. Déterminer si les intégrales ci-dessous sont convergentes ou divergentes

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(\frac{t}{1+t^2})dt$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}}dt$

Déterminer si les séries ci-dessous sont convergentes ou divergentes

- $\displaystyle\sum \frac{n^3}{5^n}$
- $\displaystyle\sum \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^{3/2}})$

Exercice 2. On considère $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \pi,\ 0 \leq x \leq y\}$. Calculer l'intégrale double

$$\iint_A x\sin(y)dxdy$$

On considère $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 4\}$. Calculer l'intégrale double :

$$\iint_B \frac{y}{x^2+y^2}dxdy$$

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1) Calculer u_0.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

En déduire une expression de v_n en fonction de u_n et u_{n+1}.

4) Déduire de ce qui précède que

$$v_0 + \cdots + v_n = u_0 + (-1)^n u_{n+1}$$

5) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4. On souhaite étudier la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \\ u_0 \geq -2 \end{cases}$$

On définit la fonction $f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$.

1) Montrer que $f([-2, +\infty[) \subset [-2, +\infty[$ et déterminer les points fixes de f.
2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) en fonction de la valeur u_0.
3) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers 2.
4) On suppose dans la suite que $u_0 \geq 0$. Montrer que pour tout n, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$
5) Déduire de la question précédente que $u_n = 2 + O(\left(\frac{1}{2}\right)^n)$.