Examen

16 mai 2019 - 4h.

Exercice 1. [Principe d'incertitude de Heisenberg]
On rappelle la normalisation utilisée de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$:

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{u}(\xi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x)\, dx.$$

1. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u'(x)|^2\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi.$$

2. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à valeurs réelles, montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x)\, dx \,+\, 2\left(\int_{-\infty}^{\infty} x u(x) u'(x)\, dx\right) \;=\; 0.$$

3. En déduire que

$$\frac{1}{2}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \;\leqslant\; \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 |u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 2.
Rappels et notations : L 'expression du produit scalaire sur L^2_{per} est donné par :

$$\forall u, v \in L^2_{\text{per}} \quad \langle u, v\rangle \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(x)}v(x)\,dx,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n \in C^\infty_{\text{per}}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\; e_n(x) \;=\; e^{inx}.$$

Pour $u \in L^2_{\text{per}}$, et $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(u)$ le n-ième coefficient de Fourier de u. On rappelle enfin que $\ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ est l'espace de Hilbert des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \;<\; +\infty.$$

muni de son produit scalaire standard.

Soit $u \in L^2_{\text{per}}$, on dit que u admet une dérivée faible dans L^2_{per} si il existe un élément $f \in L^2_{\text{per}}$ tel que

$$\forall \phi \in C^\infty_{\text{per}},\; \langle u, \phi'\rangle \;=\; -\langle f, \phi\rangle.$$

On dit alors que f est la dérivée faible de u. On note H^1_{per} l'ensemble des fonctions de L^2_{per} qui admettent une telle dérivée faible.

1. Soit $f \in L^2_{\text{per}}$ et $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$, en quel sens la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ converge-t-elle ? Rappeler la formule de Parseval-Plancherel.
2. Montrer que si $u \in C^\infty_{\text{per}}$ alors
$$\forall k \geqslant 0, \exists M_k > 0,\; \forall n \in \mathbb{Z}^*,\; |c_n(u)| \;\leqslant\; M_k|n|^{-k}. \tag{1}$$
3. Réciproquement, montrer que si u vérifie la condition précédente (1), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ définit une fonction C^∞_{per} qui coïncide avec u.
4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite à valeurs complexes, montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes (on rappelle que c_0 est l'ensemble des suites à support fini).
$$\text{(i)} \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \;\leqslant\; M,$$
$$\text{(ii)} \quad \forall b \in c_0,\; |\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n| \leqslant M\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
5. Soit $u \in L^2_{\text{per}}$, montrer que $u \in H^1_{\text{per}}$ si et seulement si $(nc_n(u))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$.
6. Montrer que si $u \in H^1_{\text{per}}$ alors, en notant u' sa dérivée faible, on a
$$u' \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} inc_n(u)e_n \text{ dans } L^2_{\text{per}}.$$

Indication : on pourra commencer par calculer les coefficients de Fourier de u'.

Exercice 3. [Noyau de Poisson]
On utilise les notations de l'exercice précédent (qui sont aussi celles du cours).

1. Soit $r \in]0,1[$ et $f \in L^2_{\text{per}}$, on souhaite définir $P_r f$ par la formule
$$P_r f \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} e_n.$$
Montrer que cette série converge normalement dans L^2_{per} et que $f \mapsto P_r f$ définit alors un opérateur linéaire continu de L^2_{per} dans L^2_{per}.
2. Montrer que pour tout $r \in]0,1[$ et toute fonction $f \in L^2_{\text{per}}$, $P_r f$ est en fait C^∞.
Indication : on pourra utiliser la question 3 de l'exercice précédent.
3. Pour $r \in]0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, Calculer les sommes
$$\sum_{n\geqslant 0} r^n e^{in\theta} \text{ et } \sum_{n\leqslant -1} r^{|n|} e^{in\theta}.$$
4. Soit $r \in]0,1[$, on définit p_r sur $\mathbb{R}$ par
$$p_r(\theta) \;=\; \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \;=\; \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}, \text{ en posant } z \;=\; re^{i\theta}.$$
Montrer que
$$\forall f \in L^2_{\text{per}},\; P_r f(\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_r(\theta-\theta') f(\theta')\, d\theta'.$$
5. Montrer que
$$\forall r \in]0,1[,\; \forall \theta \in \mathbb{R},\; p_r(\theta) \geqslant 0,$$
$$\forall r \in]0,1[,\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_r(\theta) d\theta \;=\; 1,$$
$$\forall r \in]0,1[, \forall \delta \in]0,\frac{\pi}{2}[,\; \sup\{\mathbb{1}_{|\theta|>\delta} p_r(\theta),\; \theta \in]-\pi,\pi[\} \;\leqslant\; \frac{1-r^2}{\sin\delta}.$$
Indication : on pourra utiliser la question précédente pour f bien choisie pour le deuxième point, et faire un dessin dans $\mathbb{C}$ pour le troisième.
6. En déduire que si $f \in C^0_{\text{per}}$ alors
$$P_r f(0) \xrightarrow[r\to 1^-]{} f(0).$$
Indication : on pourra commencer par montrer que
$$\forall \delta > 0,\; \forall r < 1,\; |f(0) - P_r f(0)| \;\leqslant\; M_\delta \;+\; 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{1}_{|\theta'|>\delta} p_r(\theta')\, d\theta',$$
où $M_\delta \;=\; \sup\{|f(\theta) - f(0)|,\; |\theta| \leqslant \delta\}$.
7. Soit $f \in C^0_{\text{per}}$, on suppose que $\forall n \in \mathbb{Z},\; c_n(f) \geqslant 0$. Montrer que
$$\forall r \in]0,1[,\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} \;\leqslant\; \|f\|_\infty.$$
En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$ converge et vaut $f(0)$.

Problème : autour de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^2$.

L'objectif de ce problème est d'étudier la résolution du système suivant (qu'on imagine posé pour une fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$)

$$\begin{cases} \forall (t,x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \partial_t^2 u(t,x,y) - \Delta u(t,x,y) &=& 0 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 & u(0,x,y) &=& 0 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 & \partial_t u(0,x,y) &=& \psi(x,y). \end{cases}$$

Il est décomposé en quatre exercices qui ne sont pas indépendants. On pourra donc admettre les résultats des questions précédentes (si on n'a pas réussi à les démontrer), en le signalant bien sur sa copie, pour continuer à avancer dans le problème.

On note J_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$J_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir\cos\theta}\, d\theta.$$

On rappelle que la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^2$ est définie par

$$\widehat{\psi}(\xi,\eta) = \mathcal{F}[\psi](\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi + y\eta)} \psi(x,y)\; dxdy.$$

P-1 : Un calcul préliminaire

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $a_+ = \max(a,0)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on introduit fonction $w(t,\cdot)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$w(t,x,y) = (t^2 - x^2 - y^2)_+^{-\frac{1}{2}}.$$

L'objectif de cette partie préliminaire est de calculer la transformée de Fourier (par rapport à (x,y)) de $w(t,\cdot)$.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $w(t,\cdot)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. On dit que f est une fonction radiale lorsqu'il existe une fonction $F \in L^1(]0,+\infty[, rdr)$ telle que $f(x,y) = F(\sqrt{x^2+y^2})$ (on pourra écrire $f(x,y) = F(r)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$). Montrer qu'alors
$$\forall (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2,\ \mathcal{F}[f](\xi,\eta) = G(\rho) \text{ avec } \rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}, \text{ et}$$
$$\forall \rho > 0,\ G(\rho) = \int_{r>0} F(r) J_0(r\rho)\, rdr.$$
3. On admet que
$$\forall \rho \in \mathbb{R},\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} J_0(r\rho)\, rdr = \frac{\sin\rho}{\rho}.$$
En déduire que
$$\forall (\xi,\eta),\ \mathcal{F}[w(t,\cdot)](\xi,\eta) = \frac{\sin(t\rho)}{\rho},\ \text{avec } \rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}. \tag{2}$$

P-2 : Existence

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ on définit u sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ par

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\eta)} \hat{\psi}(\xi,\eta) \frac{\sin(t\rho)}{\rho}\, d\xi d\eta,\ \text{avec } \rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

1. Montrer que u est C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ et vérifie l'équation des ondes :
$$\forall (t,x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x,y) - \Delta u(t,x,y) = 0.$$

2. Montrer que
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} u(0,x,y) & = & 0\\ \partial_t u(0,x,y) & = & \psi(x,y).\end{array}\right.$$

3. En utilisant (2), montrer que
$$\begin{aligned} u(t,x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(t^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2)_+^{-\frac12}\psi(x',y')\,dx'dy'\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\pi}^{\pi}(t^2-r^2)_+^{-\frac12}\psi(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)\,rdrd\theta.\end{aligned}$$

P-3 : Unicité

On note X l'espace des fonctions $u\in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$ qui vérifient de plus la propriété suivante :
$$\begin{gathered}\forall T\in\mathbb{R},\ \forall k,\ell,m,N\in\mathbb{N},\exists M>0,\\ \forall t\in[-T,T],\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left|\partial_t^k\partial_x^\ell\partial_y^m u(t,x,y)\right| \leqslant M(1+x^2+y^2)^{-N}\end{gathered}$$

On pourra remarquer que si $u\in X$ alors toutes les dérivées partielles (de tout ordre) de u sont encore dans X. On pourra utiliser les formules d'intégration par parties suivantes, valables pour u et v dans X :
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}(\partial_x u)\cdot v\,dxdy &= -\int_{\mathbb{R}^2}u\cdot(\partial_x v)\,dxdy\\ \int_{\mathbb{R}^2}(\partial_y u)\cdot v\,dxdy &= -\int_{\mathbb{R}^2}u\cdot(\partial_y v)\,dxdy\end{aligned}$$

1. Soit $u\in X$ on définit les fonctions p et q sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{aligned} p(t) &= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\partial_t u(t,x,y)\right)^2\,dxdy\\ q(t) &= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\partial_x u(t,x,y)\right)^2+\left(\partial_y u(t,x,y)\right)^2\,dxdy\end{aligned}$$
Montrer que p et q sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.
On pourra rédiger soigneusement le cas C^1 et expliquer plus rapidement comment avoir C^k

2. On suppose que $u\in X$ est solution de l'équation des ondes
$$\partial_t^2 u-\Delta u = 0.$$
Montrer qu'alors $p+q$ est constante.

3. Montrer que le problème suivant (posé pour $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$) a au plus une solution u dans X.
$$\left\{\begin{array}{ccrcl}\forall(t,x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \partial_t^2u(t,x,y)-\Delta u(t,x,y) & = & 0\\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 & & u(0,x,y) & = & 0\\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 & & \partial_t u(0,x,y) & = & \psi(x,y).\end{array}\right.$$

4. Montrer que la solution construite dans la partie précédente est dans X. On pourra commencer par montrer l'expression alternative
$$u(t,x,y) = \frac{t}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(1-s^2)_+^{-\frac12}\psi(x+ts\cos\theta,\ y+ts\sin\theta)\,sdsd\theta$$

P-4 Justification du calcul admis

L'objectif de cette partie est de montrer l'identité suivante :

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} J_0(r\rho)\, r dr \;=\; \frac{\sin \rho}{\rho}.$$

L'idée est de montrer que le membre de gauche est développable en série entière et que son développement en série entière coïncide avec le membre de droite.

1. Montrer que J_0 est une solution de l'équation différentielle

$$r^2 J_0'' + r J_0' + r^2 J_0 \;=\; 0.$$

2. Montrer que J_0 est développable en série entière sur $\mathbb{R}$:

$$J_0(r) \;=\; \sum_{k \geqslant 0} a_k r^{2k}.$$

3. Etablir une relation de récurrence vérifiée par les a_k.
4. On note

$$I_k \;=\; \int_0^1 \frac{t^{2k+1}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

   Montrer que les I_k vérifient une relation de récurrence que l'on précisera.
5. Conclure