Seconde session

juin 2019 - 3h.

Exercice 1. On rappelle que L^2_{per} est muni du produit scalaire normalisé

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(\theta)}v(\theta)\,d\theta.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(\theta) = \exp(in\theta)$.

On note $h^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, indexées par $\mathbb{Z}$, à valeurs complexes, et telles que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^2)|a_n|^2 < \infty.$$

sur $h^1(\mathbb{Z})$ on définira la norme $\|\cdot\|_{h^1}$ par

$$\|a\|_{h^1} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^2)|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pourra utiliser sans démonstration que $h^1(\mathbb{Z})$ muni de cette norme est complet.

On notera F l'application $u \mapsto F(u) = (c_n(u))_{n\in\mathbb{Z}}$ qui à une fonction L^2_{per} associe la suite de ses coefficients de Fourier. On rappelle que c'est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de L^2_{per} sur $\ell^2(\mathbb{Z})$.

1. Rappeler la formule de Parseval-Plancherel exprimant $\langle u, v\rangle$ à l'aide des coefficients de Fourier de u et v.
2. Soit $u \in C^1_{\mathrm{per}}$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(u') = inc_n(u).$$
En déduire que $F(u) \in h^1(\mathbb{Z})$.
3. Soit $u \in C^1_{\mathrm{per}}$, exprimer $\|F(u)\|_{h^1}$ à l'aide de u et u'.
4. Montrer que $h^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$ et :
$$\forall a \in h^1(\mathbb{Z}),\ \|a\|_{h^1} \leqslant \|a\|_{\ell^2}.$$
5. On définit $H^1_{\mathrm{per}} \subset L^2_{\mathrm{per}}$ par
$$u \in H^1_{\mathrm{per}} \iff F(u) \in h_1(\mathbb{Z})$$
. Montrer que $u \in H^1_{\mathrm{per}}$ si et seulement si
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|^2|c_n(u)|^2 < +\infty.$$
6. Montrer que si $u \in H^1_{\mathrm{per}}$ alors il existe $f \in L^2_{\mathrm{per}}$ telle que
$$\forall v \in C^1_{\mathrm{per}},\ \langle u, v'\rangle = \langle f, v\rangle.$$

Exercice 2. Soit $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < 1\}$ et $\overline{\mathbb{D}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$ et $\mathbb{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = 1\}$.

On pourra identifier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $x+iy \in \mathbb{C}$.

Le problème de Poisson consiste à se donner une fonction continue f sur le cercle $\mathbb{S}$ et à chercher une fonction u de classe au moins C^2 dans $\mathbb{D}$ et C^0 dans $\overline{\mathbb{D}}$ telle que

$$(P)\ \left\{\begin{array}{rcll} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u & = & 0 & \text{dans } \mathbb{D} \\ u & = & f & \text{sur } \mathbb{S} \end{array}\right.$$

On notera Δ l'opérateur différentiel défini par

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u,$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on notera $X_{\mathbb{K}} = C^2(\mathbb{D},\mathbb{K}) \cap C^0(\overline{\mathbb{D}},\mathbb{K})$ autrement dit, X est l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, de classe C^2 sur $\mathbb{D}$ qui se prolongent de façon continue à $\overline{\mathbb{D}}$.

1. Soit $u \in X_{\mathbb{R}}$, justifier qu'il existe $m_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ tel que
$$u(m_0) = \max\left\{u(m),\ m \in \overline{\mathbb{D}}\right\}.$$
2. On suppose que le maximum m_0 est dans $\mathbb{D}$. Rappeler la définition de la matrice hessienne de u en m_0. En déduire qu'alors $\Delta u(m_0) \leqslant 0$.
3. Soit $u \in X_{\mathbb{R}}$ telle que
$$\left\{\begin{array}{ll} \forall m \in \mathbb{D}, & \Delta u(m) > 0 \\ \forall m \in \mathbb{S}, & u(m) \leqslant 0. \end{array}\right.$$
Montrer qu'alors
$$\forall m \in \overline{\mathbb{D}},\ u(m) \leqslant 0.$$
4. Soit $u \in X_{\mathbb{R}}$ vérifiant
$$\left\{\begin{array}{ll} \forall m \in \mathbb{D}, & \Delta u(m) \geqslant 0 \\ \forall m \in \mathbb{S}, & u(m) \leqslant 0. \end{array}\right.$$
Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit la fonction u_ε sur $\overline{\mathbb{D}}$ par
$$u_\varepsilon(x,y) = u(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2-1).$$
Montrer que
$$\forall m \in \overline{\mathbb{D}},\ u_\varepsilon(m) \leqslant 0.$$
En déduire
$$\forall m \in \overline{\mathbb{D}},\ u(m) \leqslant 0.$$
5. Montrer que si $u \in X_{\mathbb{R}}$ vérifie
$$\left\{\begin{array}{ll} \forall m \in \mathbb{D}, & \Delta u(m) = 0 \\ \forall m \in \mathbb{S}, & u(m) = 0. \end{array}\right.$$
alors u est nulle dans $\mathbb{D}$.
6. Montrer que si f est continue et à valeurs réelles alors le problème de Poisson (P) défini dans l'introduction a au plus une solution u dans $X_{\mathbb{R}}$.
7. montrer que si f est continue et à valeurs complexes alors le problème de Poisson (P) a au plus une solution dans $X_{\mathbb{C}}$.

Exercice 3. On notera X l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On rappelle que, muni de la norme de la convergence uniforme, X est un espace de Banach.

1. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est dans $X \cap L^2$. On notera
$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 \, dx.$$
2. Calculer, en fonction de $z \in \mathbb{R}$, l'intégrale suivante :
$$k(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} (1-|\xi|) e^{iz\xi} \, d\xi.$$
3. En déduire que
$$\forall L > 0, \ \int_{-L}^{L} \big(1 - \frac{|\xi|}{L}\big) e^{iz\xi} \, d\xi = L \cdot \Big(\frac{\sin(\frac{Lz}{2})}{\frac{Lz}{2}}\Big)^2.$$
4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\hat{f}$ sa transformation de Fourier définie comme dans le cours. Soit $L > 0$, on définit la fonction $K_L[f]$ sur $\mathbb{R}$ par
$$K_L[f](x) = \frac{1}{L} \int_0^L \Big(\int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi \Big) \, d\lambda.$$
Montrer que $K_L[f]$ est bien définie et appartient à X.
5. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ K_L[f](x) = \int_{-L}^{L} \hat{f}(\xi) \Big(1 - \frac{|\xi|}{L}\Big) e^{ix\xi} \, d\xi.$$
6. Montrer qu'il existe une fonction $k_L \in X \cap L^1(\mathbb{R})$ telle que $K_L[f] = f * k_L$. On exprimera, pour tout z, $k_L(z)$ en fonction de $k(z)$.
7. On suppose que $f \in X \cap L^1(\mathbb{R})$ montrer qu'il existe une constante A, que l'on exprimera en fonction de M telle que
$$K_L[f](0) \xrightarrow[L \to +\infty]{} A \cdot f(0).$$
8. On suppose que $f \in X \cap L^1$ et que
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \hat{f}(\xi) \geqslant 0.$$
Montrer qu'alors $\hat{f} \in L^1$.