Université de TOURS - M1 Mathématiques - 2018/2019

CONTRÔLE CONTINU

Exercice 1. Questions de cours :

1. Soit f une fonction continue et 2π périodique. En quel sens la série de Fourier converge t-elle ?
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1_{\text{pm}} \bigcap \mathcal{C}^0_{\text{per}}$. Comme dans le cours, on note f' la fonction dérivée de la fonction f aux points où f est dérivable. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\, c_n(f)$. En déduire que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On note f_α l'application 2π périodique sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in]-\pi, \pi],\ f_\alpha(t) = \cos \alpha t.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la fonction f_α.
   Solution :

2. Quelle est la régularité de la fonction f ?
   Solution : .

3. En déduire que

$$\forall t \in]-\pi, \pi],\ \cos \alpha t = \frac{\sin \alpha t}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nt.$$

   Solution : .

4. Prouver que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ \text{cotan} t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

   Solution : .

5. Soit $x \in]0, \pi[$. On pose $f(t) = \text{cotan} t - \dfrac{1}{t}$ pour tout $t \in]0, x[$ et $f(0) = 0$.
   (a) Prouver que $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{dt}{t^2 - n^2\pi^2}$.
   Solution : .

   (b) En déduire que

$$\forall t \in]-\pi, \pi],\ \sin t = t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right).$$

   Solution : .

Exercice 3. *Le but de cet exercice est d'étudier les coefficients de Fourier d'une fonction 2π périodique höldérienne.*

Soit $\alpha \in]0,1]$, une fonction définie sur un intervalle I est dite *höldérienne* d'exposant α lorsqu'elle vérifie

$$\forall x, y \in I,\ |f(y) - f(x)| \leqslant C\,|y-x|^{\alpha}\,.$$

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction continue 2π périodique. On notera $\omega(\cdot)$ le module de continuité de la fonction f. C'est-à-dire la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall \delta \geqslant 0,\quad \omega(\delta) \;=\; \sup\big\{|f(x)-f(y)|,\ x,y\in\mathbb{R},\ |x-y|\leqslant\delta\big\}.$$

1. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, exprimer les coefficients de Fourier de $\tau_h[f]$ en fonction de ceux de f. On rappelle que $\tau_h[f]$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\tau_h[f](x) \;=\; f(x-h)$.
   Solution : $c_n(\tau_h[f]) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-h)e^{-inx}\,dx = e^{-inh}c_n(f)$.

2. En déduire les coefficients de Fourier de la fonction $f_h : x \mapsto f(x+h) - f(x-h)$ en fonction des coefficients de Fourier de f.
   Solution : $c_n(f_h) = 2i(\sin nh)c_n(f)$.

3. Exprimer, en fonction des coefficients de Fourier de f la quantité :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2\,dx.$$

   Solution : On applique l'inégalité de Parseval à la fonction f_h :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h)-f(x-h)|^2\,dx = 4\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sin^2(nh)\,|c_n(f)|^2.$$

4. Montrer que

$$2\sum_{2^{k-1}\leqslant|n|<2^k}|c_n(f)|^2 \leqslant \left[\omega\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\right]^2.$$

   Indication : on posera $h = \dfrac{\pi}{2^{k+1}}$.
   Solution : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+h)-f(x-h)|^2\,dx \leqslant |\omega(2h)|^2$ *donc*
   $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x+\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) - f\left(x-\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)\right|^2 dx \leqslant \left[\omega\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\right]^2$. *Or*
   $4\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2^{k+1}}\right)|c_n(f)|^2 \geqslant 4\sum_{2^{k-1}\leqslant|n|<2^k}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2^{k+1}}\right)|c_n(f)|^2$.
   Si $2^{k-1}\leqslant|n|<2^k$ *alors* $\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{n\pi}{2^{k+1}}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ *ce qui donne* $\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{2^{k+1}}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}$. *Donc*
   $2\displaystyle\sum_{2^{k-1}\leqslant|n|<2^k}|c_n(f)|^2\leqslant\left[\omega\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\right]^2$.

5. En déduire que si f est höldérienne d'exposant $\alpha > \dfrac{1}{2}$ alors la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est ℓ^1 et la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Solution : On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\displaystyle\sum_{2^{k-1}\leqslant|n|<2^k} |c_n(f)| \leqslant \left(\sum_{2^{k-1}\leqslant|n|<2^k} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{2^{k-1}\leqslant|n|<2^k} |c_n(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{\frac{k-2}{2}}\omega\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$. *Or pour tout* $\delta \geqslant 0$,
$\omega(\delta) \leqslant C\,\delta^\alpha$ *donc* $\displaystyle\sum_{2^{k-1}\leqslant|n|<2^k} |c_n(f)| \leqslant C\,2^{\frac{k-2}{2}}\left(\frac{\pi}{2^k}\right)^\alpha = C'\,2^{k\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}$ *avec* $C' > 0$.
Comme $\alpha > \dfrac{1}{2}$, *la suite* $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ *est* ℓ^1 *et la série de Fourier de* f *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$.

6. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{2n} \left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2 dx \;=\; 2n\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right) - f\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)\right]^2 dx.$$

Solution : Par périodicité, pour $1 \leqslant k \leqslant 2n$, *on a*
$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right) - f\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)\right]^2 dx.$

7. On dit que f est *à variations bornées* s'il existe une constante $A \geqslant 0$ telle pour toute suite strictement croissante $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n}$ de l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$, on a

$$\sum_{k=1}^{2n} |f(x_{k+1} - f(x_k)| \leqslant A.$$

Montrer que pour tout $x \in [-\pi,\pi]$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2 \leqslant A\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Solution : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2 \leqslant \sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant A\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

8. En intégrant la relation précédente, en déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2 dx \leqslant \frac{\pi A}{n}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Solution : $\displaystyle\frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2 dx \leqslant \frac{2\pi}{2n}A\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi A}{n}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$

9. En déduire que si f est höldérienne d'exposant α et à variation bornée alors il existe B tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{B}{|n|^{1+\alpha}}.$$

Solution : $\displaystyle \frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2 dx$

$\displaystyle = \int_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)\right]^2 dx = 8\pi\sum_{m\in\mathbb{Z}^*}\sin^2\left(\frac{m\pi}{2n}\right)|c_m(f)|^2 \geqslant 8\pi|c_n(f)|^2$ *($m=n$).*

Exercice 4. Étant donné une fonction $f\in L^1(\mathbb{R})$ et à valeurs complexes, le problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur consiste à déterminer les fonctions $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 & \text{pour tous } (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\\ \lim\limits_{y\to 0} u(\cdot,y)=f & \text{dans } L^1,\\ \sup\limits_{y>0}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|u(x,y)|\,dx<+\infty. & \end{cases}$$

On propose dans cet exercice la construction d'une solution à ce problème.

1. Montrer que
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}e^{-y|\xi|} \;=\; \frac{2y}{x^2+y^2}.$$
Pour tout $y>0$, on notera h_y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_y(x)=\frac{y}{x^2+y^2}$.
2. Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier normalisée comme dans le cours. Montrer que
$$\forall y>0,\ \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\xi)|e^{-y|\xi|}\,d\xi<+\infty.$$
En déduire que l'on peut définir une fonction u sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ par la formule
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\quad u(x,y)\;=\;\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}e^{-y|\xi|}\,d\xi.$$
3. Montrer que la fonction u définie à la question précédente est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$ et vérifie
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0.$$
4. Montrer que
$$\forall y>0,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad u(x,y)\;=\;\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot f*h_y(x).$$
5. Montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que la famille de fonctions $(C\cdot h_y)_{y>0}$ est une approximation de l'identité.
6. En déduire que la fonction $\tilde{u}$ définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\quad \tilde{u}(x,y)\;=\;\int_{\mathbb{R}}f(s)\frac{y}{\pi(y^2+(x-s)^2)}\,ds,$$
est une solution du problème de Dirichlet associé à f.