Contrôle continu terminal

Analyse Numérique et Optimisation — MA2.4, 2019

Exercice 1. *On souhaite construire un aquarium parallélépipédique de volume V. Quelles doivent être les dimensions L, l, h (longueur, largeur et hauteur) de l'aquarium pour utiliser le moins de verre possible ? (Remarquer que l'aquarium est composé de 5 plaques de verre)*

Exercice 2. *On considère le problème : Trouver*

$$\inf_{(x,y,z)\in C} (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2,$$

où

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z \leq 4, x \geq 0, y \geq 1z \geq 1\}.$$

Montrer que la borne inférieure est atteinte en un point unique et trouver les coordonnées de ce point. On commencera par établir que C est un convexe fermé.

Exercice 3. *Soit A une matrice symétrique définie positive.*

1. *Démontrer brièvement que le conditionnement de A pour la norme $\|.\|_2$, $K_2(A)$, vérifie $K_2(A) = \frac{\mu_n}{\mu_1}$ où $\mu_1(\mu_n)$ est la plus petite (resp. la plus grande) des valeurs propres de A.*

2. *On souhaite établir* **l'inégalité de Kantorovitch** *:*

$$\text{Pour tout } x \neq 0 \quad 1 \leq \frac{(Ax,x)(A^{-1}x,x)}{\|x\|^4} \leq \frac{(K_2(A)+1)^2}{4K_2(A)},$$

   (a) *En utilisant une base orthonormée bien choisie pour rendre simple l'expression de (Ax,x) et de $(A^{-1}x,x)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que*

$$\|x\|^4 \leq (Ax,x)(A^{-1}x,x)$$

   (b) *Démontrer que la fonction $f : x \to \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_n}{x}$ est convexe et en déduire son maximum sur l'intervalle $[\mu_1, \mu_n]$.*

   (c) *En utilisant le fait que $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$, déduire l'inégalité : $\sqrt{(Ax,x)(A^{-1}x,x)} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_n}} + \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_1}})\|x\|^2$ puis la deuxième partie de l'inégalité de Kantorovich*

3. *On désigne maintenant par $\tilde{x}$ l'unique solution du problème de minimisation de $J(x) = \frac{1}{2}(Ax,x) - (b,x)$ dans $\mathbb{R}^n$ pour $b \in \mathbb{R}^n$.*

   (a) *Soient x_0 et p deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique réel λ que l'on calculera, tel que :*

$$J(x_0 + \lambda p) = \min_{\mu\in\mathbb{R}} J(x_0 + \mu p).$$

   (b) *On définit une méthode pour résoudre trouver $\tilde{x}$ par :*
   Initialisation *x_0 donné, calculer $r_0 = Ax_0 - b$.*
   Algorithme *Pour $k \geq 0$ tant que $r_k \neq 0$ faire*

   - $\lambda_k = -\frac{\|r_k\|^2}{(Ar_k, r_k)}$
   - $x_{k+1} = x_k + \lambda_k r_k$
   - $r_{k+1} = Ax_{k+1} - b = r_k + \lambda_k A r_k$

   Comment se nomme cette méthode ?
   On mesure l'erreur de convergence par $E(x_k) = (A(x_k - \tilde{x}), x_k - \tilde{x})$.

(c) *Etablir que* $E(x_k) = (r_k, A^{-1}r_k)$.

(d) *Démontrer que* $E(x_{k+1}) = E(x_k)\left(1 - \frac{(r_k,r_k)^2}{(Ar_k,r_k)(A^{-1}r_k,r_k)}\right)$.

(e) *Démontrer, grâce à l'inégalité de Kantorovitch, que l'on a* $E(x_{k+1}) \leq E(x_k)\left(\dfrac{K_2(A)-1}{K_2(A)+1}\right)^2$.

(f) *En déduire la convergence de la méthode. A quelle condition est-il plus intéressant de résoudre le système linéaire* $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ *que le système* $Ax = b$*?*

Exercice 4. Quelques propriétés des polynômes de Tchebychev
Rappel : on désigne par T_n *le polynôme défini par la récurrence :*

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X, \quad \forall n \geq 1, \quad T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

On rappelle aussi que la fonction ch : $t \to \cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ *et que* $\mathrm{sh}(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

1. (a) *Etablir que si* $\varepsilon = \pm 1$, $\mathrm{ch}(a+\varepsilon b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \varepsilon\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
   (b) *Démontrer que la fonction* ch *est strictement convexe et qu'elle admet sur* $\mathbb{R}_+^*$ *une bijection réciproque notée* argch *définie sur* $[1, +\infty[$.
   (c) *Que pouvez vous dire de la convexité ou concavité de* argch *?*
   (d) *Etablir en posant* $y = e^t$ *que* $\mathrm{argch}(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1})$
2. *Etablir que*
$$\forall x, |x| \leq 1, \quad T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$
   et que la famille des polynômes est une famille de polynômes orthogonaux pour dans $L^2(]-1,1[,\omega)$ *, où* $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et le produit scalaire* $(f,g)_\omega = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\omega(t)dt$.
3. *Démontrer que*
$$\forall x \geq 1 \quad T_n(x) = \mathrm{ch}(n\ \mathrm{argch}(x)). \tag{1}$$
   et en déduire que
$$\forall n \geq 0, \quad T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right]. \tag{2}$$
4. *Soit* E_n *l'ensemble des polynômes de degré* n *dont le coefficient en* x^n *est* 1. *Montrer, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, que*
$$\forall p \in E_n \quad \max_{-1\leq x\leq 1} \frac{|T_n(x)|}{2^{n-1}} \leq \max_{-1\leq x\leq 1} |p(x)|.$$
   On pourra raisonner par l'absurde et calculer la valeur des $T_n(x_k)$ *où* $x_k = \cos(k\pi/n)$.
5. *On définit* q_n *par* $\frac{1}{2^n}T_{n+1}(X) = X^{n+1} - q_n(X)$. *Etablir, en citant précisément le théorème utilisé, que* q_n *est le polynôme de meilleure approximation uniforme de* X^{n+1} *sur* $\mathbb{R}_n[X]$*, l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à* n.
6. *En déduire que le choix des zéros des polynômes de Tchebychev est le meilleur pour l'interpolation.*

B) Approximation des fonctions Lipschitziennes

1. *Démontrer que les racines du polynôme* T_{n+1} *sont les* $x_{i,n} = \cos(\theta_{i,n}) = \cos(\frac{\pi}{2}(\frac{2i+1}{n+1}))$. *On appelle les* $x_{i,n}$ *Points de Tchebychev de "rang"* n *pour l'intervalle* $[-1, 1]$.
2. *Etablir que les polynômes* $(L_{i,n})_{1\leq i\leq n}$ *d'interpolation de Lagrange aux points* $x_{i,n}$ *ont pour expression*
$$L_{i,n}(X) = \frac{\prod_{j=0}^n (X - x_j)}{(X - x_i)\prod_{i\neq j}(x_i - x_j)}.$$
   puis que
$$L_{i,n}(X) = \frac{T_{n+1}(X)}{(X - x_i)T'_{n+1}(x_i).}$$

3. *En déduire que*

$$L_{i,n}(X) = (-1)^i \frac{T_{n+1}(X)}{(X - x_i)} \frac{\sqrt{1 - x_{i,n}^2}}{n}.$$

4. *En déduire que*

$$|L_{i,n}(\cos\theta)| \leq \frac{|\sin\theta_i \cos(n+1)\theta|}{(n+1)|\cos(\theta) - \cos(\theta_i))|}$$

puis que

$$|L_{i,n}(\cos\theta)| \leq \pi \frac{|\cos(n+1)\theta|}{(n+1)|\theta - \theta_i|}$$

5. *En utilisant le théorème des accroissements finis, et en posant* $h = \frac{\pi}{n+1}$ *démontrer que*

$$\sum_{i=1}^{n} |L_{i,n}(\cos\theta)| \leq \frac{\pi}{(n+1)h} \sum_{j \notin \{i, i-1, i+1\}} \frac{1}{|i-j| - 1} + 3\pi.$$

et en déduire qu'il existe $C > 0$ *telle que*

$$\Lambda_n = |L_{i,n}(\cos\theta)| \leq C \ln(n).$$

6. *Redémontrer que, pour tout* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *et si* $P_n(f)$ *désigne le polynôme d'interpolation de* f *en les points de Tchebychev de "rang"* n, *on a :*

$$\|f - P_n(f)\|_\infty \leqslant (1 + \Lambda_n) d(f, \mathbb{R}_n[X]) \ ,$$

où $d(f, \mathbb{R}_n[X]) = \inf_{q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - q\|_\infty$.

7. *Supposons* f *Lipschitzienne. En admettant le théorème de Jackson qui assure que* $d(f, \mathbb{R}_n[X]) \leq K \frac{1}{n+1}$, *établir que la suite des polynômes d'interpolation aux points de Tchebychev au rang* n *converge uniformément vers* f.

8. *Si on pose* $E_n(x) = f(x) - P_n(f)(x)$, *établir que si* f *est* $C^{n+1}([-1,1])$, *on a*

$$\|E_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

C) Intégration numérique

On se fixe un entier k *et on souhaite approcher, pour des fonctions continues sur* $[-1,1]$ *l'intégrale* $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ *par* $\int_{-1}^{1} P_f(t)dt$ *où* P_f *désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points* $x_{i,k} = \cos\theta_{i,k}$ *racines du polynôme* T_{k+1}. *On pose* $a_n(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) - T_n(y)}{x - y} dy$

1. *Etablir qu'il existe des réels* $\omega_{i,k}$ *tels que* $\int_{-1}^{1} P_f(t)dt = \sum_{i=0}^{k} \omega_{i,k} f(x_{i,k})$. *Que valent les* $\omega_{i,k}$ *en fonction des* $L_{i,k}$ *?*

2. *Etablir que*

$$\omega_{i,k} = (-1)^i \sin(\theta_{i,k}) \frac{a_{k+1}(x_{i,k})}{(k+1)}$$

3. *Démontrer que* $a_{n+1}(x) - 2x a_n(x) + a_{n-1}(x) = \frac{2}{1-n^2}(1 + (-1)^n)$ *et que*

$$a_k(\cos(\theta)) = \left(2\sin(k\theta) - \sum_{1 \leq n \leq k/2} \frac{4}{4n^2 - 1} \sin(k - 2n\theta) \right) / \sin(\theta).$$

4. *Démontrer que* $\omega_{i,k} = \left(2 - \displaystyle\sum_{1 \leq n \leq k/2} \frac{4}{4n^2 - 1} \cos(2n\theta_{i,k}) \right) / (k+1)$ *et que les* $\omega_{i,k}$ *sont tous strictement positifs.*

5. *Donner une expression de l'erreur commise pour une fonction* $f \in C^{k+1}([-1,1])$.

6. *Montrer que la méthode est convergente quand k tend vers $+\infty$ si f est Lipschitzienne.*

Exercice 5. *On se donne un intervalle $I = [a,b]$ fermé borné de $\mathbb{R}$ et $x_0, \ldots, x_n$, $n+1$ éléments distincts de I.*

1. *Montrer que, pour tout polynôme P de degré n, il existe un unique $(n+1)$-uplet de réels $(a_0, \ldots, a_n)$ tel que*
$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_{n-1}(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$
2. *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. Montrer que le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points $x_0, \ldots, x_n$ peut s'écrire*
$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k).$$
où les $f[x_0, \ldots, x_i]$ sont les différences divisées de f définies par
$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) \\ f[x_i, \ldots, x_j] = \dfrac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j+1}]}{x_j - x_i} \end{cases}$$
3. *Déduire des questions précédentes que $f[x_0, \ldots, x_n]$ est invariant par permutations.*
4. *Montrer en utilisant la fonction $f(x) - P_n(x)$ qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f[x_0, \ldots, x_n] = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.*
5. *Montrer que $|P_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\pi_n(x)|$ pour tout $x \in [a,b]$ avec $M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ et $\pi_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$. On distinguera les cas $x \in \{x_0, \ldots, x_n\}$ et $x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$. Dans le second cas, on appliquera les résultats précédents au polynôme interpolateur de Lagrange aux points $x_0, \ldots, x_n, x$.*

Exercice 6. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. L'objectif de cet exercice est de montrer que si f et h sont deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ avec f convexe et h concave telles que $h(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une fonction affine g telle que $h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*
Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin de la définition suivante : Soit $p : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une fonction. On dit que p est sous-additive si p satisfait :

- *$p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \geqslant 0$,*
- *$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ pour tous $x, y \in E$.*

On admettra le résultat suivant (théorème de Hahn-Banach) : Soient p une fonction sous-additive, F un sous-espace vectoriel de E et ϕ une forme linéaire sur F telle que $\forall x \in F, \phi(x) \leqslant p(x)$, alors il existe une extension $\tilde{\phi}$ de ϕ à E tout entier tel que $\forall x \in E, \tilde{\phi}(x) \leqslant p(x)$.

1. *Soit p une fonction sous-additive sur E. Montrer que l'ensemble $\{x \in E, p(x) < 1\}$ est une partie convexe de E.*
2. *Inversément, si C est un ouvert convexe non vide de E contenant l'origine, on appelle jauge de C la fonction p_C définie par*
$$p_C(x) = \inf\{\alpha \geqslant 0, x \in \alpha C\},$$
avec αC l'image par l'homothétie de centre 0 et de rapport α de C.
   (a) *Vérifier que αC est convexe et que $\{\alpha \geqslant 0, x \in \alpha C\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}^+$. [On pourra montrer que si $\alpha < \beta$, $\alpha C \subset \beta C$.]*
   (b) *Déterminer ce que vaut $p_B(x)$ si B désigne la boule unité ouverte. On pourra s'appuyer sur une figure.*
   (c) *Montrer que p_C est sous-linéaire et que $C = \{x \in E, p(x) < 1\}$. Ind : pour $\varepsilon > 0$, introduire $\lambda = p(x) + \varepsilon$ et $\mu = p(y) + \varepsilon$.)*
3. *Sous les hypothèses de la question précédente, soit $y \notin C$. Montrer qu'il existe une forme linéaire ψ sur E telle que $\psi(y) = 1$ et $\psi(x) < 1$ pour tout $x \in C$.*
4. *En déduire que si C est un convexe ouvert et $0 \notin C$, il existe une forme linéaire k telle que $k(x) > 0$ pour tout $x \in C$.*
5. *Soient C_1 et C_2 deux parties convexes avec C_1 ouvert telles que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Montrer que l'ensemble $C_1 - C_2 = \{x - y, x \in C_1, y \in C_2\}$ est un convexe ouvert et que $0 \notin C_1 - C_2$.*
6. *Montrer qu'il existe une forme linéaire h et un réel a tels que $C_1 \subset h^{-1}(]-\infty, a[)$ et $C_2 \subset h^{-1}(]a, \infty[)$.*
7. *Si f est convexe, montrer que l'intérieur de l'épigraphe de f, $\mathring{\mathrm{epi}}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, y > f(x)\}$.*
8. *Conclure.*