Université Tours
Département de Mathématiques

License 2ième année
2018–2019

Rattrapage

Durée : 2h
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit $\varphi \in E^*$ une forme linéaire sur E. Montrer que si $\varphi \neq O_{E^*}$, φ est surjective.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Donner la définition de la base duale $\mathcal{B}^*(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de $\mathcal{B}$.
3. Donner la définition d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E.
4. Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
5. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Rappeler la définition de l'orthogonal $F^\perp$ de F pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ puis montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Exercice 2 (Base duale)**.** Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ donnée par

$$f_1 = (1,1,0), f_2 = (0,2,-1), f_3 = (0,-1,1).$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E.
2. Donner la base duale $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{F}$.

Exercice 3 (Orthogonal)**.** Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard, on considère la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}\{(1,2,1)\}$.

1. Donner une base de $H = D^\perp$.
2. Donner la matrice de p_D la projection orthogonale sur D et en déduire celle de p_H, la projection orthogonale sur H.
3. Calculer $d(e_1, H)$, la distance du vecteur $e_1 = (1,0,0)$ à H.

Exercice 4. Soit $E = M_2(\mathbb{R})$. On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer ensuite que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
3. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire.
4. Montrer que, pour toute matrice $M \in E$, on a $\mathrm{tr}(M) \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\mathrm{tr}({}^tMM)}$.