Université de Tours 2019-2020
L3S6 Calcul Différentiel et Équations Différentielles
Contrôle continu 1 (3h)

Un barème indicatif sur 24 points a été établi. Le correcteur appréciera le soin avec lequel les réponses seront justifiées

Exercice 1.

A - Les questions ci-dessous sont indépendantes.

(i) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$g(x, y) = (\exp(xy^2) - x, \cos(x - y^2), x^2).$$

Justifier brièvement que g est différentiable et donner sa matrice jacobienne.

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction admettant en tout point les dérivées partielles suivantes $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u, v) = v + u$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v) = u$. Montrer que la fonction F définie par :

$$F(x, y) = f(x^2 - y, y - x)\ ,$$

est différentiable. Déterminer sa matrice jacobienne en (x, y).

(iii) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u, v deux fonctions de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que, si H est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, alors la fonction définie sur I par $t \mapsto H(u(t), v(t))$ est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

B - On munit l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on définit $G(A, B) = [A, B] = AB - BA$ (*cette application est appelée commutateur*).

(i) Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|[A, B]\| \leq 2\|A\|\,\|B\|$.

(ii) Montrer que $G : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est différentiable et que

$$DG(A, B)\begin{pmatrix} H \\ K \end{pmatrix} = [A, K] + [H, B]$$

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considérera la norme $N(A, B) = \max(\|A\|, \|B\|)$

Exercice 2. On considère $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\psi(x, y) = x^6 + y^6 - 6xy\ .$$

1) Déterminer les points critiques de ψ ainsi que leurs natures.
(On résoudra soigneusement les équations donnant les points critiques en évitant d'en rajouter ou d'en oublier par des manipulations imprudentes.)

2) On note $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi(x, y) = 1\}$. Montrer qu'il existe une fonction φ, de classe C^1, définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ telle que tout point de Γ dans un voisinage de $(0, 1)$ est de la forme $(x, \varphi(x))$. Préciser la valeur de $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et donner $\varphi'(0)$.

Exercice 3. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien standard sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \quad \text{pour tout } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

On fixe $p \in \mathbb{R}^n$. On introduit la fonction $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \,, \qquad j(x) = \exp\left(\langle x, p \rangle^2\right) \,.$$

1) Montrer que j est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et calculer le gradient de j en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la norme $\|\nabla j(x)\|$ est majorée par $2\|x\|\|p\|^2 \exp(\|x\|^2\|p\|^2)$.
2) Soit $R > 0$. Montrer qu'il existe une constante $C(R, \|p\|)$ telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\|, \|y\| \leq R$, on a :

$$|j(x) - j(y)| \leq C(R, \|p\|)\|x - y\| \,.$$

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne standard $\|\cdot\|$. On considère alors l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{4}\sin(x + y) \\ y + \frac{1}{4}\cos(x - y) \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est localement inversible en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} a - \frac{1}{4}\sin(x + y) \\ b - \frac{1}{4}\cos(x - y) \end{pmatrix}$$

   a) Calculer $D\varphi(x, y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.
   b) Montrer que $|||D\varphi(x, y)||| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que, pour tout (x, y), $(x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')\| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\|(x, y) - (x', y')\|.$$

   c) Montrer que $f(x, y) = (a, b)$ si et seulement si $(x, y) = \varphi(x, y)$. Montrer alors que f est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
3) Justifier alors que f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
4) Calculer alors la matrice jacobienne de f^{-1} en $f(0, 0)$.