Université F. Rabelais 2018-2019
L3S6 Calcul Différentiel et Équations Différentielles
Examen de rattrapage (durée : 3h)

Exercice 1.
(i) Résoudre l'équation :

$$y'(t) = y(t) + e^{2t}, \quad y(0) = 1 \; .$$

(ii) On considère le système d'équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + 2z(t) \\ z'(t) & = & 2y(t) + 2z(t) \end{array} \right.$$

avec la donnée initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$.
(ii-a) Sans résoudre complètement le système, montrer que :

$$x(t) + y(t) + z(t) = e^{4t}(x_0 + y_0 + z_0) \; .$$

(ii-b) Résoudre le système d'équation en donnant explicitement $x(t), y(t), z(t)$ en fonction de t et de x_0, y_0, z_0.
(ii-c) À quelle condition sur x_0, y_0, z_0, a-t-on $(x(t), y(t), z(t)) \to 0$ quand t tend vers $+\infty$?

Exercice 2.
On veut résoudre l'équation différentielle :

$$y'(t) = \frac{2}{3}([y(t)]^2 - 5y(t) + 4), \quad y(0) = y_0 \; .$$

(i) Montrer que cette équation a une solution, au moins sur un petit intervalle de temps $[-\tau, \tau]$.
(ii) Quelle est cette solution si $y_0 = 1$? Sur quel intervalle de temps existe-t-elle ?

On suppose désormais que $y_0 = 2$.

(iii) Prouver que, pour tout $t \in [-\tau, \tau]$, $1 < y(t) < 4$. (On pourra procéder par l'absurde.)
(iv) En déduire que la solution existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(v) Calculer explicitement la solution de cette équation et donner son comportement lorsque $t \to +/-\infty$.

Exercice 3.
(i) Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la fonction définie par :

$$g(x, y, z) = (x + y^2, y(1 + x), z + \sin(x))$$

(i-a) Donner la matrice jacobienne de g.
(i-b) On note I l'ensemble des points au voisinage desquels g est un difféomorphisme local. Déterminer I (on pourra donner l'équation satisfaite par les points de I^c le complémentaire de I).

(ii) Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction $W : \mathbb{R}^2 \to R$ en posant :

$$W(t, s) = F(t + s, u(t), v(s)) \ .$$

Calculer $\dfrac{\partial W}{\partial t}(t, s)$ et $\dfrac{\partial W}{\partial s}(t, s)$ en utilisant deux méthodes : le calcul direct et le passage par les matrices jacobiennes.

(iii) On considère l'équation :

$$\exp(ax) = a \ .$$

Pour $a = 1$, cette équation a une solution qui est $x = 0$.
(iii-a) Prouver que, si a est proche de 1, il existe une fonction φ de classe C^1 définie au voisinage de 1 telle que la solution de l'équation proche de 0 s'écrive sous la forme $x = \varphi(a)$ et déterminer $\varphi'(a)$ pour a proche de 1 (on donnera explicitement $\varphi'(1)$).
(iii-b) Montrer que φ est de classe C^2 (toujours pour a proche de 1) et donner $\varphi''(1)$.

(iv) On note $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par :

$$\psi(x) = \exp(-||a - x||^2) \ ,$$

où $a = (a_1, \cdots, a_n)$ est un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^n$ et $|| \cdot ||$ désigne la norme euclidienne standard dans $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$||x||^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \ ,$$

si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(iv-a) Donner son gradient sous une forme simple, sans coordonnées et en déduire sa norme.

(iv-b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telles que $|| \ \nabla\psi(x)|| \le C$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(iv-c) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|\psi(x) - \psi(y)| \le C.||x - y||_2 \ .$$