Université F. Rabelais 2018-2019
L3S6 Calcul Différentiel et Équations Différentielles
Deuxième contrôle continu (3h)

Exercice 1.
A - Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, la fonction définie par :

$$g(x,y,z) = (\sin(xy) + z, \exp(xz))$$

(i) Donner la matrice jacobienne de g.
(ii) Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, montrer que la fonction :

$$F(x,y) = g(x,y,h(x,y)) \ ,$$

est de classe C^1 et déterminer sa matrice jacobienne.

B - Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe une solution de l'équation différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & \dfrac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ y'(t) & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) \end{array} \right.$$

qui est définie pour tout $t \geq 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante sur $[0, +\infty[$.

C - On pose $G(x,y) = x^4 + y^3 - 5xy$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(i) Prouver que G est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
(ii) On note $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ G(x,y) = 1\}$. Montrer qu'il existe une fonction φ, de classe C^1, définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ telle que tout point de Γ dans un voisinage de $(1,0)$ est de la forme $(\varphi(y), y)$. Préciser la valeur de $\varphi'(y)$ et donner $\varphi'(0)$.

Exercice 2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\varphi'(0) = 0$ et :

$$|\varphi'(t)| \leq 1 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \ .$$

On note $||\cdot||$ la norme euclidienne standard sur $I\!R^n$:

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad \text{pour tout} \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I\!R^n \; .$$

On introduit la fonction $j : I\!R^n \to I\!R$ définie par :

$$\forall x \in I\!R^n \; , \qquad j(x) = \varphi\left(||x||\right) \; .$$

(i) Montrer que j est de classe C^1 sur $I\!R^n - \{0\}$ et calculer le gradient de j en tout point $x \in I\!R^n - \{0\}$.
(ii) En utilisant un développement limité de φ en 0, prouver que j est dérivable en 0 et que $\nabla j(0) = 0$. En déduire que j est de classe C^1 sur $I\!R^n$.
(iv) Prouver que, pour tous $x, y \in I\!R^n$:

$$|j(x) - j(y)| \leq ||x - y|| \; .$$

(on pourra proposer deux preuves, l'une basée sur le Théorème des Accroissements Finis dans $I\!R$, l'autre sur le Théorème des Accroissements Finis dans $I\!R^n$, cette seconde version étant celle qui est attendue.)

Exercice 3.
Calculer les points critiques de la fonction $\psi : I\!R^2 \to I\!R$ définie par :

$$\psi(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy \; ,$$

et déterminer leurs natures.
(On résoudra soigneusement les équations donnant les points critiques en évitant d'en rajouter ou d'en oublier par des manipulations imprudentes.)

Exercice 4. On considère $I\!R^2$ muni de la norme euclidienne standard $\|\cdot\|$ et l'application $f : I\!R^2 \to I\!R^2$ définie par :

$$f(x, y) = (x + \arctan\frac{y}{2}, y + \frac{1}{2}\cos x).$$

(i) Montrer que f est de classe C^1 et que f est localement inversible en tout point de $I\!R^2$.
(ii) Pour $(a, b) \in I\!R^2$, on considère

$$\varphi(x, y) = (a - \arctan\frac{y}{2}, b - \frac{1}{2}\cos x).$$

Montrer que φ est C^1 et $\|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')\| \leq \frac{1}{2}\|(x, y) - (x', y')\|$ pour tout (x, y), $(x', y') \in I\!R^2$.
(iii) Montrer que $f(x, y) = (a, b)$ si et seulement si $\varphi(x, y) = (x, y)$.
(iv) Prouver que f réalise une bijection de $I\!R^2$ sur $I\!R^2$.
(v) Montrer que f est un difféomorphisme de $I\!R^2$ sur $I\!R^2$.
(vi) Calculer $Df^{-1}(x + \arctan\frac{y}{2}, y + \frac{1}{2}\cos x)$, pour tout $(x, y) \in I\!R^2$.