Université de Tours 2018-2019
L3S6 Calcul Différentiel et Équations différentielles

CC1 : durée 3h

Exercice 1 : (les questions (i), (ii) et (iii) sont indépendantes.)
(i) Résoudre l'équation différentielle : $y'(t) = 4[y(t)]^2 + 1$, $y(0) = 0$. On précisera sur quel intervalle la solution est définie.
(ii) Soit A la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$ en écrivant A sous la forme $Id + J$.
(iii) On considère l'équation différentielle : $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 2t + 1$.

1. Déterminer une solution particulière y_1 de cette équation de la forme $y_1(t) = at+b$. En déduire la solution générale de cette équation.
2. Trouver l'unique solution f de cette équation telle que $f(0) = 2$ et telle que $f(t) - y_1(t) \to 0$ en $+\infty$.

Exercice 2 : On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

(i) Dire sans calcul pourquoi la matrice A est diagonalisable puis calculer son polynôme caractéristique.
(ii) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
(iii) Résoudre l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) & = & 2x(t) + 2y(t) + z(t) \end{array} \right.$$

avec la donnée initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$.
(iv) A quelle condition sur x_0, y_0, z_0, la solution tend-elle vers 0 quand t tend vers $+\infty$?

Exercice 3 : On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$:

$$y'(t) = \sqrt{4 + [y(t)]^2} + \cos(2t) \quad \text{avec } y(0) = y_0 .$$

(i) Montrer que cette équation différentielle a une solution définie pour tout temps $t > 0$.
(ii) On suppose que $y_0 \geq 0$. Prouver que $y_0 + t \leq y(t) \leq e^t y_0 + 3(e^t - 1)$.
(*Indication :* on rappelle que, pour tous $a, b \geq 0$:

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} . \qquad)$$

Exercice 4 :
(i) Montrer que l'équation différentielle :

$$y'(t) = -y(t)\cos(y(t)) \quad , \quad y(0) = y_0 ,$$

a une unique solution définie sur un intervalle de temps maximal $[0, \tau[$, où $\tau > 0$ dépend de y_0.
(ii) On suppose désormais que $0 < y_0 < \pi/2$. Prouver que $0 < y(t) < \pi/2$ pour tout $t \in [0, \tau[$.
(iii) En déduire que la solution est définie pour tout $t \in [0, +\infty[$.
(iv) Montrer que $t \mapsto y(t)$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ et que $y(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.