Examen de session 2 du 2 juillet 2020 – Durée 1h30

Les exercices sont indépendants. Le résultat d'une question non traitée peut être admis et utilisé par la suite. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction. Bon travail !

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Donner la définition de la loi de probabilité de X, notée $\mathbb{P}_X$, et montrer qu'il s'agit une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ désigne la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2
Soit n un entier naturel non nul. On dispose d'une urne B contenant n boules numérotées de 1 à n, et de n urnes B_1 à B_n, chacune des urnes B_k contenant k boules numérotées de 1 à k. On tire au hasard une boule dans l'urne B, puis, si le numéro de la boule tirée est k, alors on tire au hasard une boule dans l'urne B_k. On note X le numéro de la boule obtenue à l'issue du deuxième tirage. *Dans le suite, on ne demande pas de décrire le modèle probabiliste utilisé.*

1) Déterminer la loi de X.
2) Calculer l'espérance de X, $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3
On dit qu'une variable aléatoire réelle positive X suit une loi log-normale de paramètre $(m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ si $Y = \ln(X)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ admettant pour densité la fonction $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}$.
On rappelle que si $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *alors* $\mathbb{E}(Y) = m$, $\mathbb{V}(Y) = \sigma^2$ *et si* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aY + b \sim \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.
Soit X une variable aléatoire réelle de loi log-normale de paramètre (m, σ^2).

1) Vérifier que $Z = e^{-m}X$ est une variable aléatoire de loi log-normale de paramètre $(0, \sigma^2)$.
2) Vérifier que $\mathbb{E}(Z) = e^{\sigma^2/2}$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$.
3) Si $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X^n?
4) En déduire $\mathbb{E}(X^2)$ puis la variance $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 4
On considère une suite de variables aléatoires réelles indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$, toutes de loi de Cauchy, c'est-à-dire de densité donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$.
On pose, pour tout $n \geq 1$, $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ et $Z_n = \dfrac{\pi M_n}{n}$.

1) Déterminer la fonction de répartition F de la loi de Cauchy.
2) Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(M_n > x) = 1$.
3) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et préciser une densité de la loi limite. *On pourra distinguer les cas* $x \leq 0$ *et* $x > 0$ *dans l'étude de la fonction de répartition de* Z_n.

On rappelle que pour $t > 0$, $\arctan(t) + \arctan(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2}$ *et que* $\arctan(t) = t + o(t)$ *quand* $t \to 0$.

Exercice 5
On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes, chacune de loi uniforme sur $[0, 1]$, c'est-à-dire de densité $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Déterminer une densité de $X + Y$.