Devoir du 11 mars 2020 – 3 heures

Les exercices sont indépendants. Le résultat d'une question non traitée peut être admis et utilisé par la suite. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction. Bon travail !

Exercice 1

1) On considère l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Donner la définition d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur cet espace.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit l'application $\delta_a : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$$\delta_a(B) = \mathbb{1}_B(a),$$
où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Monter que δ_a est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_a(x) = f(a).$$
Indication : On pourra commencer par le cas où f est une application étagée positive.

Exercice 2

1. On considère deux évènements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0.1$, $\mathbb{P}(B) = 0.9$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.91$. Les évènements A et B sont-ils indépendants?

2. On considère trois évènements (mutuellement) indépendants A, B et C tels que $\mathbb{P}(A) = 0.8$, $\mathbb{P}(B) = 0.5$ et $\mathbb{P}(C) = 0.2$. Que vaut $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$?

Exercice 3 Une boîte contient une balle noire et une balle blanche. Une balle est tirée au hasard dans la boîte: on remet celle-ci ainsi qu'une nouvelle balle de la même couleur. On tire alors une des trois balles au hasard dans la boîte. On introduit les évènements suivants:

$$B_1 = \{\text{la première balle tirée est blanche}\} \text{ et } B_2 = \{\text{la seconde balle tirée est blanche}\}.$$

1. Quelle est la probabilité que la seconde balle tirée soit blanche ?

2. Quelle est la probabilité que l'une au moins des deux balles tirées soit blanche?

3. Quelle est la probabilité que la première balle tirée soit blanche, sachant que l'une au moins de ces deux balles tirées est blanche?

Exercice 4 Soit X et X' des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\lambda' > 0$. On rappelle que la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est la loi discrète $\displaystyle\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$.

1. (a) Justifier que $\frac{1}{1+X}$ est une variable aléatoire intégrable. Calculer son espérance.
   (b) Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{1}{(1+X)(2+X)}\right]$ et en déduire $\mathbb{E}\left[\frac{1}{2+X}\right]$.

2. (a) Calculer $\mathbb{P}(X + X' > 0)$.
   (b) Déterminer la loi de $X + X'$.

Exercice 5

1. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{-e^{-x}}$. Justifier que g est la fonction de répartition d'une variable aléatoire. On la note Y.

2. Justifer que Y admet une densité que l'on déterminera.

3. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire de densité $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$. Calculer la fonction de répartition F de X.

4. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes et suivant toutes les deux une loi exponentielle de paramètre 1. Soit $M = \max(X_1, X_2)$ la variable aléatoire correspondant au maximum de ces deux variables aléatoires. Déterminer le loi de M.

5. On note maintenant $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ où $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout réel x, calculer $F_n(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x)$.

6. Soit u un réel fixé, que vaut $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n$? En déduire que pour tout réel x,

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x + \ln(n)) = g(x).$$

Exercice 6 On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par :

$$f : x \mapsto C(x + 1)(2 - x)\mathbb{1}_{[-1;2]}(x).$$

1. Calculer C de sorte que f soit une densité de probabilité.

2. On suppose que Y est une variable aléatoire de densité f. Donner les probabilités $\mathbb{P}(Y = 0)$ et $\mathbb{P}(Y \in \left[\frac{1}{2}; 3\right])$.

Dans la suite, on prend $\alpha \in [0; 1]$, et on s'intéresse à :

$$\mathbb{P}_X = \alpha\delta_0 + (1 - \alpha)\mathbb{P}_Y$$

3. Justifier que $\mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité sur un espace mesurable qu'on précisera.

4. On considère X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$. Donner les probabilités $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X \in \left[\frac{1}{2}; 3\right])$

5. Donner la fonction de répartition de Y puis de X.

6. Donner lorsqu'elle existe l'espérance de X et celle de Y.

7. Peut-on fixer α tel que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{10}$? Même question avec $\mathbb{E}(X) = 1$.