S6. Probabilités et statistiques. 2018/2019. CC2.

Remarque. Sauf mention du contraire, on demande pour chaque question une preuve concise et précise.

Exercice 1 (Cours).

1. Donner la définition d'une mesure de probabilité.
2. Les individus d'une population peuvent être de type A ou de type B. On note $p \in [0,1]$ la proportion d'individus de type A. On considère un échantillon de taille n que l'on modélise par une suite $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p.
   (a) Donner la définition d'un test au seuil α de l'hypothèse « $p = 1/2$ » contre l'hypothèse « $p \neq 1/2$ ».
   (b) Définir en quelques lignes un exemple pertinent d'un tel test (on exclut en particulier un test dont la puissance est nulle pour toute valeur de p). On ne demande aucune justification dans cette question.
3. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1]$. On pose
$$T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}.$$
Donner la loi de T et son espérance. On ne demande aucune justification dans cette question.
4. Soit X une variable aléatoire positive. Soit $\lambda > 0$. Montrer l'inégalité de Markov, c'est-à-dire l'inégalité
$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$

Exercice 2. Calculer $\mathbb{E}(N(N-1))$ lorsque N est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0,1,2,3\}$. Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On suppose que ces trois variables aléatoires sont indépendantes. Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions irréductibles lorsque c'est possible.

1. Quelle est l'espérance de X ?
2. Quelle est la loi de $X' = XZ$?
3. Quelle est la loi de $Y' = YZ$?
4. Quelle sont les espérances de X', Y' et $X'Y'$?
5. Les variables aléatoires X' et Y' sont-elles indépendantes ?
6. Quelle sont les variances de X' et Y' ?
7. (*) Quelle est la loi de $A = \min(X, Y)$?
8. Quelle est la loi de $2Y$?
9. (*) Quelle est la loi de $B = \min(X, 2Y)$?

Exercice 4. Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$. On pose $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu de toutes les parties sur Ω. On considère $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On définit deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en posant, pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$,
$$X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \text{ et } Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_2.$$

1. Quelle est la loi de X ? Quelle est la loi de Y ?
2. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 5. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer l'inégalité
$$\mathbb{P}(N \geq 1) \leq \mathbb{E}(N).$$
2. Que vaut $\mathbb{P}(N \geq 1)$ si $\mathbb{E}(N) = 0$ ou si $\mathbb{E}(N^2) = 0$? On suppose dans la suite que ce n'est pas le cas.
3. Montrer l'égalité
$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}\left(N \mathbb{1}_{N \geq 1}\right).$$
4. En déduire
$$\mathbb{P}(N \geq 1) \geq \frac{[\mathbb{E}(N)]^2}{\mathbb{E}\left(N^2\right)}.$$
On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose, pour tout $n \geq 1$,
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$
On pose, pour tout $n \geq 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
Enfin, pour tout réel u, on pose
$$f(u) = \mathbb{E}(\exp(uX_1)).$$
L'objectif de cet exercice est d'établir le résultat suivant : pour tout $\beta > 1/2$,
$$\mathbb{P}\left[\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n^\beta} = 0\right] = 1.$$

1. Établir le résultat pour $\beta \geq 1$. On pourra utiliser la loi des grands nombres.
2. Soit Y une variable aléatoire. Soient a et u deux réels strictement positifs. Établir l'inégalité
$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \mathbb{E}\left[\exp(u(Y-a))\right].$$
3. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité
$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq f(u)^n \exp(-ua).$$
4. Expliciter $f(u)$.
5. (*) Montrer
$$f(u) \leq \exp(u^2/2).$$
On pourra utiliser le développement en série entière de l'exponentielle.
6. En déduire
$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right).$$
On pourra optimiser en u.
7. En déduire
$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2\exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right).$$
8. (*) En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\beta > 1/2$, l'inégalité suivante :
$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} 1_{\{|S_n| \geq \varepsilon n^\beta\}}\right) < \infty.$$
9. (*) Conclure.