S6. Probabilités et statistiques. 2018/2019. Rattrapage.

Remarque. Sauf mention du contraire, on demande pour chaque question une preuve concise et précise.

Exercice 1 (Cours).

1. Donner la définition d'une mesure de probabilité.
2. Les individus d'une population peuvent être de type A ou de type B. On note $p \in [0,1]$ la proportion d'individus de type A. On considère un échantillon de taille n que l'on modélise par une suite $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p.
   (a) Donner la définition d'un test au seuil α de l'hypothèse « $p = 1/2$ » contre l'hypothèse « $p \neq 1/2$ ».
   (b) Définir en quelques lignes un exemple (mathématique !) pertinent d'un tel test (on exclut en particulier un test dont la puissance est nulle pour toute valeur de p). On ne demande aucune justification dans cette question.
3. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On pose
$$S = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
Donner la loi de S, son espérance et sa variance. On ne demande aucune justification dans cette question.

Exercice 2. Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$. On pose $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu de toutes les parties sur Ω. On considère $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On définit deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en posant, pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$,
$$X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \text{ et } Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_2.$$

1. Quelle est la loi de X ? Quelle est la loi de Y ?
2. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. Calculer $\mathbb{E}\big[N(N-1)(N-2)\big]$ lorsque N est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 4. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$. Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions irréductibles lorsque c'est possible.

1. Quelle est l'espérance de X ?
2. Quelle est l'espérance de $X + Y + Z$?
3. Quelle est la probabilité de l'évènement $A = \{X = Y\}$?
4. Quelle est la probabilité de l'évènement $B = \{X + Y\}$ est paire ?
5. Que vaut $\mathbb{P}(B|A)$?
6. Que vaut $\mathbb{P}(A|B)$?
7. Les évènements $C = \{Y + Z = 7\}$ et $D = \{Z = 1\}$ sont-ils indépendants ?
8. Que vaut $\mathbb{E}\big[(X+Y)\mathbb{1}_D\big]$?
9. Que vaut $\mathbb{E}\big[(X+Y)\mathbb{1}_A\big]$?

Exercice 5. Soient $a \leq b$ deux réels. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$.

1. Montrer que X et X^2 sont intégrables.
2. Montrer que
$$\inf_{m \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\big[(X-m)^2\big] = \mathrm{var}(X).$$
3. En déduire
$$\mathrm{var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Exercice 6.

1. Soit $(Y_n)_n$ une suite de variable aléatoires. Soit Y une variable aléatoire. On considère les trois propriétés suivantes :
   (i). Pour toute application continue et bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[\varphi(Y_n)\big] \;= \mathbb{E}\big[\varphi(Y)\big].$$
   (ii). Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[\exp(itY_n)\big] = \mathbb{E}\big[\exp(itY)\big].$$
   (iii). Pour tout réel $y \in \mathbb{R}$,
   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \le y) = \mathbb{P}(Y \le y).$$
   On rappelle que les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes. On ne demande pas de le démontrer. Lorsque ces deux propriétés sont vérifiées, on dit que $(Y_n)_n$ converge en loi vers Y.
   (a) Donner un exemple où (i) est vérifiée mais (iii) n'est pas vérifiée. On pourra considérer des variables aléatoires constantes.
   (b) On suppose que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{P}(Y = y) = 0$. Montrer que dans ce cas (i) implique (iii). On pourra prouver et utiliser les deux résultats suivants :
      i. Si $y \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, il $\eta > 0$ tel que
      $$\mathbb{P}(Y \le y - \eta) \ge \mathbb{P}(Y \le y) - \varepsilon \text{ et } P(Y \le y + \eta) \le \mathbb{P}(Y \le y) + \varepsilon.$$
      ii. Si $y \in \mathbb{R}$ et $\eta > 0$ il existe deux applications continues et bornées $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
      $$\mathbb{1}_{]-\infty,y-\eta]} \le g_1 \le 1_{]-\infty,y]} \text{ et } 1_{]-\infty,y]} \le g_2 \le \mathbb{1}_{]-\infty,y+\eta]}.$$
2. Soit X une variable aléatoire de carré intégrable. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
   $$f(t) = \mathbb{E}\big[\exp(itX)\big].$$
   Montrer que f est deux fois dérivable et expliciter f' et f''.
3. On suppose de plus que l'espérance de X est nulle et que sa variance est égale à 1. Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
4. Soient a et b deux complexes de module au plus égal à 1. Montrer, pour tout entier $n \ge 1$, l'inégalité
   $$|a^n - b^n| \le n|a - b|.$$
   On pourra procéder par récurrence sur n.
5. Soit $(z_n)_n$ une suite de complexes tendant vers le réel z. Déduire de ce qui précède
   $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = e^z.$$
   On pourra faire intervenir
   $$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$
6. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que, pour tout n, X_n a la même loi que la variable aléatoire X de la question 3. Pour tout $n \ge 1$, on pose
   $$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}}.$$
   Soit Y une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite. On rappelle que l'on a, pour tout réel t,
   $$\mathbb{E}\big[\exp(itY)\big] = e^{-t^2/2}.$$
   Déduire des questions précédentes que $(Y_n)_n$ converge en loi vers Y.
7. Déduire des questions précédentes, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
   $$\mathbb{P}\left[\frac{\sum_{k=1}^n X_n}{\sqrt{n}} \le y\right] \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-u^2/2} du.$$