Intégration - 2018/2019 - CC1

Remarques.

- Sauf mention du contraire, j'attends une rédaction claire et concise d'une démonstration à chaque question. Je rappelle que votre copie n'est pas votre brouillon. Je me réserve la possibilité de ne pas lire la fin de la réponse à une question si le début est incompréhensible. Privilégiez la qualité (rigueur, introduction des variables, clareté, concision etc.) à la quantité.
- Sauf mention du contraire, les intervalles des $\mathbb{R}$ sont munis de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

Exercice 1 (Cours).

1. Donner la définition d'une tribu $\mathcal{A}$ sur un ensemble X.
2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $A \in \mathcal{A}$. Que vaut, par définition, l'intégrale de $\mathbb{1}_A$ contre la mesure μ ?

Exercice 2 (Questions rapides).

1. On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$ où
$$\mu = \delta_0 + \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_3.$$
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. L'intégrale de f contre la mesure μ a-t-elle un sens ? Si oui que vaut l'intégrale de f contre la mesure μ ?
2. On se place dans le même cadre que dans la question 1. On considère l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ si x est non nul et $g(0) = 1$. Les applications f et g sont-elles égales μ-presque partout ?
3. Toute application mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est-elle continue ?
4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, f_n(x) > 0\}$$
est-il mesurable ?
5. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! - \frac{1}{n+2}}$$
converge-t-elle ? Si oui quelle est sa limite ?

Exercice 3. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose
$$f(x) \sim \frac{1}{x^2} \text{ au voisinage de } +\infty.$$
L'application f est-elle intégrable ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application intégrable. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(\pi x)^n dx$$

converge-t-elle ? Si oui quelle est sa limite ?

Exercice 5. Pour tout $n \geq 1$ on considère l'application $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{(x^{2n} + x^n + 1)^{1/n}}.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \int_{[0,+\infty[} f_n(x)dx$$

converge-t-elle ? Si oui quelle est sa limite ?

Exercice 6.

1. On pose
$$\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} : \forall y \in A, -y \in A\}.$$
   (a) A-t-on $[0, 1] \in \mathcal{S}$?
   (b) A-t-on $[-1, 1] \in \mathcal{S}$?
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante simple sur $y, y' \in \mathbb{R}$ pour que $\{y, y'\} \in \mathcal{S}$.
   (d) Montrer que $\mathcal{S}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2$.
   (a) Est-elle mesurable en tant qu'application de $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$?
   (b) Est-elle mesurable en tant qu'application de $(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$?
3. Mêmes questions avec l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^3$.
4. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ?
   (a) Pour toute application $h : (\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, si $|h|$ est paire alors h est mesurable.
   (b) Pour toute application $h : (\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, si h est mesurable alors $|h|$ est paire. On pourra utiliser la question 1.(c).