Université de Tours **L3 Mathématiques**
Année 2018-2019 **Intégration**

Examen
Durée de l'épreuve : 3 heures

Le sujet est long (3 pages) et il est normal de ne pas traiter toutes les questions dans le temps imparti. Vous pouvez admettre une question et traiter les suivantes. On admettra la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables rencontrées dans le sujet. Les réponses devront être étayées par des arguments construits. Bon travail !

Exercice 1 On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer à quels espaces $\mathcal{L}^p$, avec $p \in [1, +\infty[$, elles appartiennent :

$$f \ : \ x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x\sqrt{x}} e^{-x} 1_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g \ : \ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+|x|^3}}.$$

Exercice 2 Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et deux fonctions f et g dans $\mathcal{L}^2(\mu)$. On introduit la fonction $A : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$A(\alpha) = \int_E (f + \alpha g)^2 d\mu.$$

1) En remarquant que pour tout $x \in E$, $2f(x)g(x) \leq f(x)^2 + g(x)^2$, démontrer que les fonctions fg et $(f + \alpha g)^2$ sont μ-intégrables.
2) En étudiant le signe de la fonction A, retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_E fg d\mu\right)^2 \leq \int_E f^2 d\mu \int_E g^2 d\mu.$$

3) Que dire de f et g si l'inégalité ci-dessus est une égalité ?

Exercice 3 On considère la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

1) Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On pourra calculer le carré de l'intégrale grâce à un changement de variables en polaires.

2) En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

3) Déterminer l'ensemble sur lequel F est finie.

4) La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

5) Démontrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} F'(x)$.

6) Établir que, pour $x > 0$,

$$F'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{u^2 e^{-u^2}}{1 + u^2/x} du.$$

En déduire un équivalent de $F'(x)$ pour $x \to +\infty$.

7) Démontrer que, pour $x > 0$,

$$F(x) - F'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

8) Démontrer que

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

9) Tracer le graphe de la fonction F.

Exercice 4 Soit

$$I = \int_{]0,1[^2} \frac{1}{1 - xy} dxdy.$$

1) Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \dfrac{u - v}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{u + v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

À quelle transformation géométrique cette application est-elle associée ? Démontrer que l'image réciproque de $]0, 1[^2$ est donnée par

$$D = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < u < \sqrt{2},\ |v| < \min(u, \sqrt{2} - u)\right\}.$$

On pourra faire un dessin.

2) À l'aide du changement de variables $\begin{cases} x = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{u+v}{\sqrt{2}} \end{cases}$ démontrer que

$$I = 2 \int_D \frac{1}{2 - u^2 + v^2} dudv.$$

3) En déduire que

$$I = 4 \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\int_0^u \frac{1}{2 - u^2 + v^2} dv\right) du + 4 \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{1}{2 - u^2 + v^2} dv\right) du.$$

4) Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$,

$$\int_0^x \frac{1}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

5) En déduire que I est la somme des deux intégrales I_1 et I_2 suivantes :

$$I_1 = 4\int_0^{1/\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)\frac{du}{\sqrt{2-u^2}} \quad \text{et} \quad I_2 = 4\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right)\frac{du}{\sqrt{2-u^2}}.$$

6) Calculer I_1 grâce au changement de variables $u = \sqrt{2}\sin(\theta)$.

7) Démontrer que $I_2 = 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$ grâce au changement de variables $u = \sqrt{2}\cos(2\theta)$.

8) Cette question est indépendante des précédentes. Démontrer que $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

9) Conclure que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5 L'objet de cet exercice est de démontrer partiellement le théorème suivant.
Théorème. (Lemme de Riemann-Lebesgue)
Soit f une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{|\alpha|\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\alpha x}dx = 0.$$

1) Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} |f(x)|d\lambda(x).$$

En déduire que pour obtenir le lemme de Riemann-Lebesgue, il suffit de démontrer que, pour tous réels $a < b$,

$$\lim_{|\alpha|\to+\infty} \int_{[a,b]} f(x)e^{i\alpha x}d\lambda(x) = 0. \tag{1}$$

On fixe dans la suite deux réels $a < b$.

2) Démontrer que la propriété (1) est vraie si f est la fonction indicatrice d'un intervalle inclus dans $[a, b]$.

3) Conclure en admettant que la propriété (1) est vraie pour la fonction indicatrice de tout ensemble A de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ inclus dans $[a, b]$.

4) Question difficile. Démontrer la propriété admise à la question précédente.