UNIVERSITE DE TOURS /**Faculté des Sciences & Techniques**

LICENCE de MATHEMATIQUES (L3)

année universitaire 2018-2019 – semestre 5

Topologie et espaces de Hilbert
Epreuve de rattrapage
mercredi 19 juin 2019—-durée : 3h

Utilisation de documents ou d'appareils électroniques interdite
Les copies seront appréciées en fonction de la qualité de la rédaction précise des preuves

Exercice 1
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et : $I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.
On considère la fonction numérique H définie sur $I \times I$ par $H(x, y) = f(x) - f(y)$ et le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $A = \{(x, y) \in I \times I;\ \ x < y\}$.
1. A est-il convexe ? connexe ?
2. Montrer que $H(A)$ est un intervalle ne contenant pas 0.
3. Montrer que f est monotone sur I.

Exercice 2 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.
1. Expliciter cette norme et donner un exemple d'un élément de E de norme 2.
2. On considère la forme linéaire T définie sur E par

$$T(f) = \int_{-1}^{1} t.f(t)dt$$

a. Montrer que T est continue et $|||T||| \leq 1$.
b. En considérant la suite de fonctions f_n définies par :

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \leq t \leq \frac{-1}{n} \\ nt & \text{si} \quad \frac{-1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Montrer que $|||T||| = 1$.
3. Montrer que l'ensemble $A = \{f \in E;\ \ |T(f)| = 1\}$ est un fermé de E.

Exercice 3 Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et $P \in L(H)$ une application linéaire continue de H dans H qui vérifie $P \circ P = P$ et $|||P||| \leq 1$.
1) Montrer que $ImP = \{x \in H/\ P(x) = x\}$. En déduire que ImP est un fermé de H.
2) Dans la suite on veut montrer que P est la projection orthogonale sur ImP.
a) Montrer que pour tout $x \in H$

$$\|P(x) - x\|^2 + 2 < x, P(x) - x > \leq 0 \tag{1}$$

En déduire que

$$\|P(x) - x\|^2 + 2 < x - y, P(x) - x > \leq 0 \qquad \forall x \in H\ , \forall y \in ImP \tag{2}$$

Indication : Remplacer x par $x - y$ dans (1).
b) En remplacant x par tx, $t \in \mathbb{R}$ dans (2), montrer que pour tous $x \in H$ et $y \in ImP$ on a $< y, P(x) - x >= 0$.
c) Conclure.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$: soit $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^4 + \sin z = 1\right\}$, en justifiant rigoureusement votre réponse, dire si A est compact ou non.

Exercice 5 Dans l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels $E = \mathbb{R}[X]$ dont on écrira les éléments de degré $n \in \mathbb{N}$ sous la forme $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$, on considère

$$||P||_1 = \sum_{k=0}^{k=n} |a_k| \text{ et } ||P||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$

1. Montrer que $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sont des normes sur E.
2. Pour tout entier n soit $P_n = X^n \in E$. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy pour la norme $||.||_1$?
3. La boule unité fermée de $(E, ||.||_1)$ est-elle compacte ?
4. Les deux normes sont-elles équivalentes ?