UNIVERSITE DE TOURS /**Faculté des Sciences & Techniques**

LICENCE de MATHEMATIQUES (L3)

année universitaire 2018-2019 – semestre 5

Topologie et espaces de Hilbert
Contrôle Continu 2
vendredi 11 janvier 2019—-durée : 3h

Utilisation de documents ou d'appareils électroniques interdite
Les copies seront appréciées en fonction de la qualité de la rédaction précise des preuves

Exercice 1
Ecrire précisement les définitions pour une partie non vide A d'un espace vectoriel normé :
D1 : "A est convexe",
D2 : "A est connexe",
D3 : "A est connexe par arcs"
et indiquer les relations entre ces trois propriétés. (pas de preuve demandées)

Exercice 2
Soit $\ell^2(\mathbb{R})$ l'espace de Hilbert des suites réelles de carrés sommables muni du produit scalaire canonique.
1. Montrer que $A = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}) | \forall\ n \in \mathbb{N},\quad x_n \geq 0\}$ est un convexe fermé de $\ell^2(\mathbb{R})$.
2. Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liée à x par $a_n = \max\{x_n, 0\}$ pour tout entier n.
a. Soit $y \in A$. Quel est le signe de $< x - a, y - a >$?
b. Déterminer la projection $P_A(x)$ de x sur A.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, N_1 et N_2 des normes sur E.
1. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \max\{N_1(x), N_2(x)\}$ définit une norme sur E que l'on notera N^+.
2. A titre d'exemple, représenter clairement dans $\mathbb{R}^2$ les boules unités fermées pour N_1, N_2 et N^+ lorsque $N_1(x, y) = |x| + |y|$ et $N_2(x, y) = \sqrt{2}\max\{|x|, |y|\}$.
3. Retour au cadre général ; on note B_1, B_2 et B^+ les boules unités fermées respectives, associées aux normes N_1, N_2 et N^+, démontrer que :
a- $B^+ = B_1 \cap B_2$
b- $N_1 \leq N_2 \Longleftrightarrow B_2 \subset B_1$.
4. Expliquer, en proposant un contre-exemple argumenté, pourquoi remplacer "max" par "min" ne permet pas de définir toujours une norme.

Exercice 4
Soient $(r_n)_{n\geq 2}$ une suite de nombres réels telle que :
(1) $|r_{n+1} - r_n| \leq \lambda^n$, pour tout entier $n \geq 2$, où λ est un réel, $\lambda \in]0,1[$.
1. Montrer que la suite $(r_n)_{n\geq 2}$ est de Cauchy.
Indication : on pourra écrire, pour $m > n$, $r_m - r_n = \sum_{k=n}^{m-1}(r_{k+1} - r_k)$.
2. Soit $(r_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par récurrence par $r_0 = 2$ et $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$.
Montrer que les termes de la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ sont rationnels, satisfont la condition (*)

(*) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad r_n.r_{n-1} \geq 2$

et la condition (1) et qu'il s'agit d'une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R}$.
3. La suite $(r_n)_{n\geq 0}$ admet-elle une limite (et si oui laquelle ?) dans $\mathbb{Q}$?, dans $\mathbb{R}$?
Que retrouve-t-on comme résultat sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 5
Soit A un compact d'un espace vectoriel normé, soit f une application de A dans A telle que

$$\forall\ (x,y)\ \in A^2 \quad x \neq y \quad ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$$

1. Montrer que f est continue et admet un unique point fixe $\alpha \in A$.
2. Montrer que α est la limite de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in A$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Indication : on pourra utiliser pour ces questions la fonction numérique $\phi(x) = ||f(x) - x||$.