Université de Tours 2018/19

L3-Math : Topologie et espaces vectoriels normés

Contrôle continu 1

Durée : 3 heures

L'usage de tout dispositif électronique de calcul (calculatrice, smartphone, tablette ...) ainsi que celui de notes écrites est interdit.

Exercice 1.

1. On définit $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$.

a. Δ est-il ouvert ? Est-il fermé ? (on justifiera la réponse).

b. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de Δ.

2. On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n qui sont inversibles.

a. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit $A_k = A + \frac{1}{k} I_n$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ (I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Montrer que $A_k \in GL_n(\mathbb{R})$ à partir d'un certain rang.

c. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé, on note Comp(A) son complémentaire. Montrer que $\mathrm{comp}(\overline{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{Comp}(A)}}$ et que $\overline{\mathrm{Comp}(A)} = \mathrm{Comp}\left(\overset{\circ}{A}\right)$

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé E. Si A est une partie non vide de E et $x \in E$, on définit la distance de x à A par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

1. Montrer que $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

2.a. Montrer que, si A est compact et $x \in E$, il existe $\bar{a} \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - \bar{a}\|$.

2.b. Montrer que le résultat ci dessus est vrai si A est fermé et E est de dimension finie.

3.a. Montrer que pour tout $x, y \in E$ et $a \in A$, on a $d(x, A) \leq \|x - y\| + \|y - a\|$.

3.b. En déduire que la fonction $d_A : E \to \mathbb{R}; x \mapsto d(x, A)$ est Lipschitzienne.

4.a. Soit A un fermé et B un compact tel que $A \cap B = \emptyset$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|a - b\| \geq \delta$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$.

4.b. Trouver un contre-exemple si on suppose juste B fermé.

suite au verso

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour tout $u = (u_n) \in E$ on pose

$$\|u\|_\infty = \sup\{|u_n|,\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad N(u) = \sup\left\{\frac{|u_n|}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}\ .$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $u \in E$, $N(u) \leq C\|u\|_\infty$.
3. Montrer que $C = 1$ est la meilleure constante dans **2**.
4. Montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_a = \{u \in E \mid \lim_{n \to +\infty} u_n = a\}$$

5. Montrer que F_a est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

6. F_a est-il fermé dans (E, N) ?

7. Montrer que F_a est dense dans (E, N)