L3 LICENCE DE MATHÉMATIQUES - UNIVERSITÉ DE TOURS - 2019/2020

Contrôle continu Terminal d'algèbre (Durée : 3 heures)
Documents et matériels électroniques interdits

Questions brèves :

1. On se donne $(G,.)$ un groupe et $x \in G$, un élément d'ordre n. Discuter, en fonction de la parité de n, l'ordre de x^2.
2. Soit G un groupe de cardinal $2n$. On définit la relation R suivante :
$$x \mathcal{R} y \quad \text{si et seulement si } x = y \ \text{ ou } \ x = y^{-1}.$$
Etablir que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, déterminer la classe de l'élément neutre et en déduire que G possède un élément d'ordre 2. Quel résultat (à énoncer précisément) du cours permet-il d'aboutir directement à ce résultat ?
3. Soit p un nombre premier et $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit X un ensemble à p éléments. On suppose qu'on a une action de G sur X. Démontrer que l'action est soit triviale, soit transitive. (On dit que l'action est triviale si $\forall g \in G$, $\forall x \in X$, $g \bullet x = x$.)

Exercice 1.
Soient $(G_1,.),(G_2,.)$ deux groupes et H_1 (resp.H_2) un sous-groupe de G_1 (resp.G_2).

1. Cours : démontrer que l'on munit $G_1 \times G_2$ d'une loi de groupe en posant $(k,l).(k',l') = (k.k', l.l')$.
2. Démontrer que l'ensemble $H_1 \times H_2$ est un sous-groupe de $G_1 \times G_2$, et qu'il est distingué si chacun des H_i l'est.
3. Réciproquement, si $H_1 \times H_2$ est distingué dans $G_1 \times G_2$, établir que H_1 (resp. H_2) est distingué dans G_1 (resp. dans G_2).
4. On suppose que H_1 et H_2 sont distingués respectivement dans G_1 et G_2 montrer que $G_1 \times G_2/(H_1 \times H_2)$ est isomorphe à $G_1/H_1 \times G_2/H_2$. On pourra introduire l'application définie sur $G_1 \times G_2$ par $\theta(k,l) = (k.H_1, l.H_2)$.

Exercice 2. On s'intéresse à un groupe G de cardinal 185. Les parties **A, B, C, D** peuvent être abordées indépendamment.

A) Questions préliminaires :

1. Quels sont les ordres possibles des éléments d'un groupe G à 185 éléments ?
2. Démontrer, en énonçant précisément le théorème du cours utilisé, qu'il existe un $x \in G$ d'ordre 5 et un y d'ordre 37.
On notera dans toute la suite de l'exercice $H =< x >$ et $K =< y >$.
3. A quel(s) groupe(s) $\mathbb{U}_m$ (groupe des racines m-ième de l'unité) sont-ils respectivement isomorphes ?

B) Dans cette partie, on s'intéresse à $\mathbb{U}_m$.

1. Etablir que $\mathbb{U}_m$ est cyclique ; on notera ω un générateur .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'entier k pour que ω^k engendre $\mathbb{U}_m$. Combien y a-t-il de générateurs ?
3. Soit ψ un automorphisme de $\mathbb{U}_m$. Démontrer que ψ est uniquement déterminé par la valeur de $\psi(\omega)$.
4. En déduire que $Aut(\mathbb{U}_m)$ est de cardinal $\varphi(m)$.

C) On suppose dans cette partie que G **est commutatif (et de cardinal** 185).

1. A quel groupe cyclique, le groupe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ est-il isomorphe ?
2. En déduire qu'il existe un entier k tel que $k \equiv 1[5]$ et $k \equiv 0[37]$ et déterminer un tel entier k .
3. En déduire que le sous-groupe $< xy >$ contient x puis qu'il est de cardinal 185.
4. En déduire que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/185\mathbb{Z}, +)$.

D) On prend G **quelconque de cardinal** 185 et on le fait agir sur un ensemble X de cardinal n.

1. Quels sont les cardinaux possibles des orbites pour cette action ?
2. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ on note n_i le nombres d'orbites à i éléments. Utiliser l'équation des classes pour trouver une relation entre les n_i.
3. On suppose que $n = 49$. Montrer qu'il y a au moins un point fixe pour l'action de G sur X.
4. Considérons $X = \{gK, g \in G$, l' ensemble des classes à gauche modulo K.
   a) Quel est le cardinal de X ?
   b) Démontrer que l'on définit une action de H sur X en posant, pour tout élément $gK \in X$, $h \bullet gK = (hg)K$.
   c) Etablir que $H \cap K = \{e_G\}$ et en déduire que $X = \{K, xK, x^2K, x^3K, x^4K\}$.
   d) **Bonus** En déduire que K est distingué dans G.

5. On appelle $\varphi : H \mapsto Aut(K) \simeq Aut(\mathbb{U}_{37})$ qui à $h \in H$ associe l'automorphisme intérieur $\alpha_h : k \mapsto hkh^{-1}$.
   a) Justifier que φ est un morphisme et donner la relation qui lie les cardinaux de $Ker\varphi$, $Im(\varphi)$ et le cardinal de H.
   b) En déduire que $Im(\varphi) = \{Id\}$ ie $\forall h \in H, k \in K$, $hk = kh$.
   c) Démontrer que $G \simeq H \times K \simeq (\mathbb{Z}/185\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 3. Soit p un nombre premier, $p > 3$. On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{M}(2, \mathbb{F}_p)$ l'anneau des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ et $GL(2, \mathbb{F}_p)$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathbb{M}(2, \mathbb{F}_p)$.

1. Montrer que l'ensemble $H = \{ \begin{bmatrix} 1 & \bar{5}\bar{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pour $\bar{a} \in \mathbb{F}_p\}$ est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{F}_p)$.
2. Soit A l'ensemble des matrices $\{M_{x,y} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$, pour $x, y \in \mathbb{F}_p\}$.
3. Montrer que $(A, +\times)$ est un sous-anneau de $M(2, \mathbb{F}_p)$. Combien y-a-t-il d'éléments dans A ?
4. Soit $M_{x,y} \in A$. Montrer que M est inversible si et seulement si $x^2 + y^2$ est non nul dans $\mathbb{F}_p$. Calculer $M_{x,y}M_{x,-y}$ et donnez l'inverse de M en fonction de w inverse de $x^2 + y^2$ dans $\mathbb{F}_p$.
5. On suppose dorénavant que $p = 3$.
   (a) Déterminer les carrés modulo 3 et résoudre $x^2 + y^2 = \bar{0}$.
   (b) En déduire que A est un corps.
   (c) En déduire que pour tout couple $(x, y) \neq (\bar{0}, \bar{0})$ qu'on a $M_{x,y}^8 = I$.
   (d) Donner les ordres des matrices $-I = M_{-1,0}$ et $J = M_{0,1}$.
   (e) Trouver un couple (x_0, y_0) tel que $M_{x_0,y_0} = x_0 I + y_0 J$ vérifie $M_{x_0,y_0}^2 = J$.
   (f) En déduire que $\mathbb{U}(A) = A^*$ est cyclique.