# Contrôle continu Terminal d'algèbre, deuxième session (Durée : 1 h 30)
# Documents et matériels électroniques interdits

**Question brève :** On considère $E = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ que l'on munit de la loi $*$ où $a * b = a + b + a \times b$ Etablir que la loi $*$ est interne et que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

**Exercice 1.**
On se propose d'étudier certains groupes contenus dans l'anneau $\mathbb{M}_2(A)$ où $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note $Id$ la matrice identité et pour $\lambda \in A$, on pose $T_{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_{2,1}(\lambda) = {}^tT_{1,2}(\lambda)$ et $D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
On désigne par $\Phi_M$ le polynôme caractéristique de la matrice $M$ et on rappelle que $\Phi_M(M) = 0$. On considère $\mathrm{GL}_2(A) = \{M \in \mathbb{M}_2(A)/ \det(M) \in \mathbb{U}(A)\}$ où $\mathbb{U}(A)$ désigne le groupe des inversibles de $A$.

1. Démontrer brièvement que $\mathbb{U}(A)$ est un groupe et prouver que $\mathrm{GL}_2(A)$ est un groupe multiplicatif.
   **On supposera dans la suite que $n = p$ nombre premier et on notera $G_p = \mathbf{GL}_2(Z/p\mathbb{Z})$ et $1_A = \bar{1}$**
   On admettra que le nombre d'éléments de $G_p = \mathrm{GL}_2(Z/p\mathbb{Z})$ est :
   $$|G_p| = |\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = (p^2 - 1)(p^2 - p).$$
2. a) Etablir que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{M \in G_p/det(M) = \bar{1}\}$ est un sous-groupe distingué de $G_p$.
   b) A l'aide du morphisme déterminant, démontrer que $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = p(p^2 - 1)$.
3. a) Calculer pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \neq \bar{0}$, $T_{1,2}(\lambda)^m$ et $D_\lambda^m$ et en déduire les ordres de ces éléments.
   b) Soit $H$ le sous- groupe de $G_p$ engendré par $T_{1,2}(1)$. Etablir que $(H, .)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ en précisant un tel isomorphisme.
4. a) Quels peuvent être les ordres d'un élément de $G_3$ ?
   b) Démontrer que pour tout nombre premier $p \geq 3$, $G_p$ possède un élément d'ordre $p$ et d'ordre 2.
5. **Dans cette question,** $p = 2$ et on remarque que $G_2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
   a) Démontrer, sans calcul, qu'il y a dans $G_2$ un élément $X$ d'ordre 2 et $Y$ un élément d'ordre 3.
   b) Calculer, pour toute matrice $M \in G_2$ son polynôme caractéristique $\Phi_M$ et en déduire qu'il y a 3 éléments d'ordre 2 dans $G_2$. Le groupe $G_2$ peut-il être commutatif ? Ind : quel serait l'ordre de $XY$ ?
   c)Démontrer qu'il n'y a qu'un sous-groupe $K$ de cardinal 3 et que $K$ est distingué dans $G_2$.

**Exercice 2.** On considère l'ensemble $D = \{\ x \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{Z}, x10^n \in \mathbb{Z}\}$ des nombres décimaux.
1) Démontrer que $D$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2)Etablir que pour tout élément de $D$ s'écrit de manière unique comme $x = 2^\alpha 5^\beta m$ où $\alpha, \beta$ sont dans $\mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$ est premier avec 10.
3) a) Décrire l'idéal engendré par 7 dans $D$.
b) On considère $I$ un idéal non réduit à $\{0\}$ de $D$. Soit $x = 2^\alpha 5^\beta m \in I$ . Etablir que $|m| \in I$.
c) Etablir qu'il existe un plus petit élément $a \in \mathbb{N}^* \cap I$ et en déduire que $aD \subset I$.
d) Démontrer en vous inspirant de la preuve vue dans $\mathbb{Z}$ que $I = aD$.

**Exercice 3.** Soient $p, q$ et $n$ trois entiers naturels tels que $p + q = n$ . On considère, dans $\mathfrak{S}_n$, l'ensemble $X_{p,q}$ des permutations $x = c_x c'_x$, produit de deux cycles $c_x$ et $c'_x$ à supports disjoints, de longueurs respectives $p$ et $q$.

1. Justifier que $X_{p,q} = X_{q,p}$ et donner l'ordre d'un élément de $X_{p,q}$.
2. Donner un élément de $X_{3,2}$ dans $\mathfrak{S}_5$, puis tous les éléments de $X_{3,2}$.
3. Soit $c = (c_1, \ldots, c_l)$ un cycle de longueur $l$ ; justifier que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma c \sigma^{-1} = (\sigma(c_1), \ldots, \sigma(c_l))$.

4. Pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout $x \in X_{p,q}$, on pose $\sigma \bullet x = \sigma x \sigma^{-1}$. Etablir que l'on définit ainsi une action de $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble $X_{p,q}$.
5. Montrer, grâce à la question 3, qu'il n'existe qu'une seule orbite dans $X_{p,q}$ sous l'action de $\mathfrak{S}_n$.
6. On suppose dorénavant que $p > q$. Caractériser le stabilisateur $G_x$ de la permutation $x = (1, \ldots, p)(p+1, \ldots, n)$.
7. En déduire le cardinal de $X_{p,q}$ si $p > q$. On commencera par rappeler la relation entre cardinal de l'orbite de $x$ et celui de $G_x$.