Contrôle continu Terminal d'algèbre de seconde session (Durée : 3 heures)
Documents et matériels électroniques interdits

Exercice 1. Questions issues du cours ou des TDs

1. L' ensemble ci-dessous est-il un sous-groupe de $\mathbb{G}L_2(\mathbb{R})$, de $O_2^+(\mathbb{R})$?

$$F = \{M = \begin{bmatrix} \cos(5\theta) & -\sin(5\theta) \\ \sin(5\theta) & \cos(5\theta) \end{bmatrix}, \theta \in \mathbb{Z}\}.$$

Si oui est-il distingué dans $O_2^+(\mathbb{R})$? dans $\mathbb{G}L_2(\mathbb{R})$?

2. Soit G un groupe d'ordre 35 agissant sur un ensemble à 13 éléments. Quels sont les cardinaux possibles pour les orbites de cette action de groupe ? Justifier qu'il y a au moins un point fixe pour cette action.
3. Soit G un groupe.
   (a) Démontrer que pour tout $g \in G$ l'application $\alpha_g : x \to \alpha_g(x) = gxg^{-1}$ est un automorphisme de G.
   (b) Démontrer soigneusement que si $o(x)$ désigne l'ordre de l'élément x de G, alors pour tout $g \in G$, on a $o(\alpha_g(x)) = o(x)$.
   (c) On suppose que z est le seul élément de G d'ordre 2. Démontrer que z est dans le centre $Z(G)$ de G.

Exercice 2.

1. Démontrer que si G et G' sont deux groupes, f est un homomorphisme de G dans G' et H' un sous groupe de G' alors $H = f^{-1}(H')$ est un sous groupe de G et qu'il est distingué si H' l'est.
2. On considère l'ensemble $GL_3(\mathbb{C})$ des matrices inversibles 3×3 à coefficients réels et $\mathcal{T}_3$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles.
   (a) Démontrer que $\mathcal{T}_3$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{C})$.
   (b) On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{T}_3$ pour lesquelles pour tout i , $1 \leq i \leq 3$, $a_{i,i} \in C_4$ où $C_4 = \{\pm 1, \pm i\}$. Démontrer que $\mathcal{U}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{T}_3$. On pourra introduire l'application $\varphi : \mathcal{T}_3 \to (\mathbb{C}^*)^3$ qui à chaque matrice $A \in \mathcal{T}_3$ associe (a_{11}, a_{22}, a_{33}).

Exercice 3.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les ensembles C_n où $C_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ est l'ensemble des racines $n-$ièmes de l'unité.
1) Redémontrer brièvement que C_n est un sous-groupe cyclique du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.
2) a) Etablir que l'application $f(z) = z^5$ définit un morphisme entre les groupes C_{10} et C_2.
b) En déduire que C_{10}/C_5 est isomorphe au groupe C_2.
3) Démontrer que si m et n sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux , le groupe C_{mn} est isomorphe au groupe $C_m \times C_n$.

Exercice 4. On considère $G_1 = \mathbb{U}(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ et $G_2 = \mathbb{U}(\mathbb{Z}/22\mathbb{Z})$

1. Démontrer que G_1 est de cardinal 10 et que G_1 est cyclique en déterminant avec le moins d'étapes possibles que $\bar{2}$ est d'ordre 10.
2. En déduire un isomorphisme entre G_1 et C_{10}.
3. Donner tous les éléments de $G_2 = \mathbb{U}(\mathbb{Z}/22\mathbb{Z})$ et établir que G_2 est de cardinal 10.
4. Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}/22\mathbb{Z}$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.
5. En déduire que G_2 est aussi cyclique.

Exercice 5.

1. Soit A un anneau commutatif unitaire. On considère I un idéal. On introduit alors l'ensemble

$$\sqrt{I} := \{a \in A \ : \ \exists n\,[1] \in \mathbb{N} \ a^n \in I\}$$

qu'on appelle le radical de I.

   (a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

   (b) Dans $\mathbb{Z}$ calculer les radicaux de $2\mathbb{Z}$ et de $9\mathbb{Z}$.

2. On considère $A = \mathbb{Z}[X]$.

   (a) Vérifier que A est bien un anneau et déterminer $\mathbb{U}(A)$ ensemble des inversibles de A.

   (b) Montrer que l'ensemble $I = \{P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(0)$ est divisible par $5\}$ est un idéal de l'anneau A.

   (c) Déterminer le radical de I.

Exercice 6.
On se place dans S_n le groupe symétrique et on considère c_n le n cycle $(1\ 2\ 3\ \ldots n)$ et τ la transposition $\tau = (n-1\ n)$.
1) Quel est l'ordre de c_n dans S_n ? Expliquer.
2) (a)Etablir que $c_n\tau = (1\ 2\ 3 \ldots, n-1)$.
(b) En déduire une décomposition de c_n en produit de transpositions puis la signature de c_n.
3) On considère $G =< c_n >$.
(a) Dans le cas où $n = 6$, donner les éléments de G en précisant leur décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Obtient-on toujours des 6-cycles ?
(b) Etablir que $o(c_n^k) = n$ si et seulement si k est premier avec n.
(c) En déduire qu'il existe $\varphi(n)$ générateurs dans G.
4) On considère maintenant $n = 5$. Soit σ une permutation de S_5 .
(a) En faisant agir le groupe $< \sigma >$ sur $\{1, \ldots, 5\}$, établir que 6 est l'ordre maximal de σ.
(b) Donner un exemple de groupe de cardinal 6 dans S_5.
6) On considère un groupe commutatif G et deux éléments a et b d'ordres respectifs p et q, deux entiers premiers entre eux. Montrer que ab est d'ordre pq.
7) On considère un éventuel groupe G de cardinal 15 de S_5.
(a) Démontrer, en énonçant précisément le résultat utilisé, qu'il existe un élément σ d'ordre 3 et un élément σ' d'ordre 5.
(b) Déduire des questions précédentes que G ne peut être commutatif.
(c) Démontrer que G ne contient aucune transposition.
(d) Plus généralement, démontrer que G ne peut contenir aucune permutation impaire

1. l'entier n dépend de a a priori