Contrôle de Novembre 2018

Durée : 3h

Questions et exercices issus du cours et des travaux dirigés

1. Pour chacun des ensembles E suivants, dire si il s'agit d'un groupe pour la loi indiquée (lorsque c'est le cas, on précisera son élément neutre).
   (a) $E =]0, +\infty[$ muni de la multiplication des réels.
   (b) L'ensemble $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ muni de la multiplication des réels.
   (c) $E = i\mathbb{R}^*$ muni de la multiplication des nombres complexes.

2. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{ième}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe.
   (b) Montrer que $\mathbb{U}_n$ est engendré par (au moins) un de ses éléments.
   (c) Quels sont les générateurs de $\mathbb{U}_n$? (on pourra dans un premier temps supposer que n est premier)

3. À quelle condition sur l'entier $n \geq 2$ l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}$, muni de la multiplication usuelle sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est-il un groupe ? (on argumentera avec précision)

4. Soit G un groupe et g un élément fixé de G. On définit $L_g : G \to G$ par $L_g(g') = gg'$ pour tout $g' \in G$.
   Montrer que L_g est une bijection de G dans G. Est-ce un automorphisme de G ?

5. On considère $H = \{M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}^*\}$.
   a) Montrer que H est un sous-groupe de $G = GL_2(\mathbb{C})$ et qu'il est distingué dans G.
   b) On se donne $(G, .)$ un groupe.
   Démontrer que le centre $Z(G)$, ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, est un sous-groupe de G et qu'il est distingué dans G.
   c) A l'aide des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer $Z(GL_2(\mathbb{C}))$. Que retrouve-t-on ainsi pour H ?

6. Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative $\star$ et possédant un élément neutre noté e. Soit b un élément de G tel qu'il existe $a, c \in E$ vérifiant $a \star b = e$ et $b \star c = e$. Montrer que $a = c$. Que peut-on dire de b dans ce cas ?

Exercice 1 : Soit σ la permutation de $\mathcal{S}_{12}$ donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 & 12 & 2 & 6 & 3 & 10 & 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Calculer l'ordre de σ.

3. Décrire toutes les orbites de σ ? En déduire la signature de σ.
4. Décomposer σ en produit de permutations. Retrouver d'une autre manière la signature de σ.
5. Que vaut σ^{110} ?
6. Décomposer σ^{110} en produit de permutations de la forme $(1i)$ où $i \in \{2, \cdots, 12\}$.

Exercice 2 : le groupe $\mathbb{H}_8$

Dans le groupe $GL(2, \mathbb{C})$, muni du produit des matrices 2×2, on considère les éléments suivants :

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

1. Quel est l'ordre de A, B et C dans $GL(2, \mathbb{C})$?
2. Calculer AB, A^2 et $AB + BA$.
   On admettra que $BC = A$, $CA = B$, $B^2 = C^2 = -I$, $BC = -CB$ et $CA = -AC$.
3. On note H le sous-groupe de $GL(2, \mathbb{C})$ engendré par A, B et C. Ce groupe est-il commutatif ?
4. Montrer sans calcul que si H est fini alors $|H|$ est divisible par 4.
5. Montrer que $H = \{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\}$. [1]
6. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$.

Exercice 3 :

Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre $2p$. Le but est de montrer que G possède au moins un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre p.
On suppose d'abord $p = 2$ donc que G est d'ordre 4.

1. Montrer que G possède au moins un élément x d'ordre 2.
2. L'élément x de la question précédente peut-il être unique ? Est-il nécessairement unique ?

Supposons maintenant $p > 2$.

1. Supposons qu'il existe deux éléments x, y d'ordre p. Montrer que les sous-groupes engendrés par x et y sont confondus ou d'intersection réduite à l'élément neutre.
2. En déduire qu'il est impossible que tous les éléments de G soient d'ordre p puis qu'il existe au moins un élément d'ordre 2.
3. Supposons maintenant par l'absurde qu'il n'existe aucun élément d'ordre p.
   (a) Montrer qu'alors tout élément $x \neq e_G$ est d'ordre 2.
   (b) Montrer que G est commutatif.
   (c) a) Soit g_0 un élément de G d'ordre 2. Quel est le cardinal du groupe quotient $G/ < g_0 >$?
   b) Calculer $(x < g_0 >)^2$ pour $x \in G$ et établir que tout $x < g_0 >$ de $G/ < g_0 >$ est d'ordre 1 ou 2 .
   c) Conclure.

1. Ce groupe s'appelle *groupe des quaternions* et est noté communément $\mathbb{H}_8$ dans la littérature.