Université de Tours — Année 2018-19

L1 Physique+Peip Module 3

Examen d'algèbre linéaire (2ème session)

Jeudi 20 Juin 2019, 13 : 30 - 15 : 30 .

Documents, calculettes et téléphones mobiles sont interdits

Exercice 1.

Soit α est un nombre réel donné et considérons l'application :

$$\big[\mathbb{T}(\mathbf{X})\big]_e = T_e.[\mathbf{X}]_e, \qquad T_e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}_e, \qquad [\mathbf{X}]_e = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

où l'indice $[\ \cdot\ ]_e$ signifie que la matrice est dans la base canonique $\underline{e} = (\boldsymbol{e}_a)_{a=1,2}$.

1. *Calculer $\mathbb{T}(\mathbf{X})$ dans la base canonique.*
2. *Vérifier que, pour tout α fixé, $\mathbf{X} \to \mathbb{T}(\mathbf{X})$ est une application linéaire $\mathbb{T} \in L(\mathbb{R}^2)$.*
3. *Identifier le noyau et l'image de $\mathbb{T}$.*
4. *Interpréter géometriquement cette application.*
5. Posons
$$\boldsymbol{f}_1 = \mathbb{T}(\boldsymbol{e}_1) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{f}_2 = \mathbb{T}(\boldsymbol{e}_2). \tag{2}$$
Evaluer les $\boldsymbol{f}_a$, $a = 1,2$ dans la base $\underline{e}$ et montrer qu'ils sont indépendants. En déduire que $\underline{f} = \big(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. *Réciproquement, exprimer les $\boldsymbol{e}_a$, $a = 1,2$ comme combinaisons des $\boldsymbol{f}_a$.*
7. *En déduire les coordonnées ξ_i dans la base $\underline{f}$ d'un vecteur $\mathbf{X} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ et réciproquement, exprimer les x_i en termes des ξ_i.*
8. *Exprimer le vecteur $\mathbb{T}(\mathbf{X})$ dans la base $\underline{f}$ en termes des coordonnées ξ_i. En déduire la matrice de $\mathbb{T}$ dans la base $\underline{f}$.*

Exercice 2.

1. Considérons les sytèmes d'équations :
$$(1)\ \left\{\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + y &= 2 \end{aligned}\right. \qquad (2)\ \left\{\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}\right. \quad . \tag{3}$$
Réécrire les systèmes (1) et (2) sous forme matricielle : $A_i.\mathbf{X} = \boldsymbol{b}$, $i = 1,2$.
2. *Montrer que la matrice A_1 est régulière. Calculer la matrice inverse et en déduire la solution du système d'équations (3). Vérifier le résultat. De même, trouver le noyau de la matrice A_2. résoudre l'équation et présenter les solutions sous forme matricielle.*