Université de Tours — Année 2018-19
L1 Physique+Peip Module 3

Examen d'algèbre linéaire

Mardi 14 Mai 2019, 11-12.30h. F21.

Documents et calculettes interdits

Exercice 1.

Soit $\boldsymbol{e}_i\,, i = 1, 2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et posons :

$$\boldsymbol{f}_1 = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_2\,. \tag{1}$$

1. *Présenter les* $\boldsymbol{f}_i\,,\ i = 1, 2$ *sous forme matricielle.*
2. *Montrer que les* $\boldsymbol{f}_i$, $i = 1, 2$ *sont des vecteurs indépendants.*
3. *Exprimer les vecteurs* $\boldsymbol{e}_i$ *de la base canonique comme combinaison linéaire des* $\boldsymbol{f}_i$, $i = 1, 2$. *En conclure que* $\underline{f} = (\boldsymbol{f}_i)_{i=1,2}$ *est une famille génératrice et en déduire qu'ils forment une base de* $\mathbb{R}^2$.
4. *Soit* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ *un vecteur donné dans la base* $\underline{e}$, $\mathbf{X} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$. *Montrer que les coordonnées de* $\mathbf{X}$ *dans la base* $\underline{f}$ *sont :*

$$\mathbf{X} = \xi\boldsymbol{f}_1 + \eta\boldsymbol{f}_2 \quad \textit{avec} \quad \xi = (2/5)x + (4/5)y, \quad \eta = (4/5)x - (2/5)y\,. \tag{2}$$

5. *Considérons l'application linéaire* $\mathbb{P}\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{f}_1, \qquad \mathbb{P}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{f}_2\,. \tag{3}$$

Calculer $\mathbb{P}(\mathbf{X})$ *dans la base canonique* $\underline{e}$.

6. *En déduire la matrice* $P = \left[\mathbb{P}\right]_e$ *de* $\mathbb{P}$ *dans la base canonique.*
7. *Vérifier que la matrice inverse est*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -2/5 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

8. *Vérifier que (2) est cohérente avec la formule :*

$$\left[X\right]_f = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}_f = P^{-1}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_e. \tag{5}$$

Exercice 2. Considérons l'application linéaire $\mathbb{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie, dans la base canonique $\underline{e} = (\boldsymbol{e}_a)_{a=1,2}$ par la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

1. *Calculer $T.\mathbf{X}$ d'un vecteur $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ écrit dans la base canonique. Trouver le noyau de l'application linéaire définie par T. Quelle est donc la dimension de l'image de T ? En déduire cette image.*
2. *Soient μ et ν deux nombres réels non nuls arbitraires. Vérifier que :*

$$\boldsymbol{f}_1 = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{f}_2 = \nu \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

   sont des vecteurs propres de $\mathbb{T}$. Quelles sont leurs valeurs propres ?
3. *Montrer que les $\boldsymbol{f}_a$, $a = 1, 2$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.*
4. *Retrouver toutes les valeurs propres et tous les vecteur propres de la matrice $\mathbb{T}$ par un calcul systématique.*
5. *Quelle est la matrice de l'application linéaire $\mathbb{T}$ dans la nouvelle base des $\underline{f} = (\boldsymbol{f}_a)_{a=1,2}$?*
6. *Calculer $\mathbb{T}(\mathbf{X})$ pour $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$.*